

॥ श्रीगणेशायनमः ॥

श्रीभास्कराचार्यकृत

लीलावतीचें सोपपत्तिक भाषांतर.

हा ग्रंथ

विनायक पांडुरंग शास्त्री खानापूरकर

यांनीं तयार केला.

तो

हरि विनायक साठे

यांनीं छापविला.



सन १८६७ च्या २५ व्या आक्टाप्रमाणें रजिष्टर करून ग्रंथकल्पनिष्ठ
सर्व हक्क आपले स्वाधीन ठेविले आहेत.

शके १८१९ सन १८९७

किंमत दोन रुपये

७७७७

Box F14

72

15507

6733

पुणे पेठ सदाशिव येथे हंदिरा छापसान्यांत छापिला.

B

हा ग्रंथ

कै. वा. रा. व. केरो लक्ष्मण छत्रे. कै. वा. रा. सा. रावजी मोरे-
श्वर देवकुळे. कै. वा. वे. शा. रा. भाऊ दीक्षीत सातारकर.
तीर्थस्वरूप बाळजांशी खानापुरकर. वे. शा. सं. रा.
रामशास्त्री गोडबोले माहुलीकर.

या गुरुवर्य पंचकांस

त्यांची विद्वत्ता व उत्तम शिक्षणपद्धति ह्या गुणांच्या
अभिनंदनार्थ कर्तार्याने अत्यादर पूर्वक
अर्पण केला आहे.



Some of the opinions given by the learned about this book, are given below;—

Poona.

Dear Sir

I was glad to receive your Translation of Bhaskaracharya's Lilavati. I could read some of the important articles in the book. I was agreeably surprised to find that the laws of Combinations and Permutations, volumes of Pyramids and Trustums, properties of triangles and quadrilaterals inscribed in a circle and many other things equally interesting and difficult should have been investigated as early as in the times of BhaskaraCharya. You have much added to the usefulness of the book by supplying the theory portion and the work may now be read with interest by students of Mathematics in Schools and Colleges.

In conclusion I may add that you have turned to a good account the help extended to you by your patrons and hope that the present will be the second of the series of Matnematical works expected from you.

I am dear Sir

yours truly

Vishnu Balvant Gokhale. M. A.
Principal Maharashtra College.

Poona—11th February 1893.

I have examined Mr. Vinayak Shastri Khanapurkar's translation of BhaskaraCharya's Lilavati. It is prepared in the same manner as the writer's translation of BhaskaraCharya's Algebra. Both these works have been translated but no attempt has been made to explain all the laconic rules given by BhaskaraCharya.



गात्राक्षिणप्रातःपालक श्रामत श्रानिवासराव पंतप्रतिनिधी
 साहेब संस्थान औष यांनी आश्रय देऊन मजकडून ज्योतिःशा-
 खार्चे अध्ययन करविले. त्यामुळे आपल्या हातून कांहीं तरी
 देशसेवा घडावी ह्याणून आर्यज्योतिःशास्त्राच्या उन्नतीच्या संब-
 धाने माझ्या मनांत तीन उद्देश उद्भवले. त्यांतील पहिला उद्देश—
 आपल्या ज्योतिःशास्त्रामध्ये सिद्धांतशिरोमणि, सूर्यसिद्धांत,
 ब्रह्मगुप्तसिद्धांत, आर्यभट्टसिद्धांत इत्यादि जे ग्रंथ आहेत त्यांची
 सोपपत्तिक भाषांतरे करावीत असा आहे. दुसरा उद्देश—
 आपल्या ज्योतिःशास्त्रामध्ये सांगोपांग जे विषय कमी आहेत.
 ते सर्व इंग्रजी ज्योतिःशास्त्रांतून घेऊन नवीन ग्रंथ गद्यात्मक
 किंवा पद्यात्मक संस्कृत भाषेमध्ये किंवा महाराष्ट्र भाषे-
 मध्ये करावेत असा आहे. तिसरा उद्देश—हल्ली
 आपल्या ग्रहगणितामध्ये जो भेद दृग्गोचर झाला
 आहे, तो काढून टाकून नवीन ग्रंथ संस्कृत भाषेमध्ये किंवा
 महाराष्ट्र भाषेमध्ये करावेत असा आहे. याप्रमाणे मनांत आ-
 ल्याबरोबर ते सिद्धीस जावेत असा हेतु धरून कोल्हापूर, मल-
 कापूर, इचलकरंजी, कुरुंदवाड, पुणे, मुंबई, वाई, तासगांव
 आणि विटे इतक्या ठिकाणी जाऊन तेथील श्रीमान् व विद्वान्
 अशा लोकांस भेटून त्यांना आपले उद्देश कळविले. त्यावर
 श्रीमंत महाराज सरकार कोल्हापूर, श्रीमंत बाबासाहेब इचलक-
 रंजीकर, श्रीमंत आबासाहेब विशाळगडकर, श्रीमंत माधवराव
 पंतअमात्य संस्थान बावडा, रावबहादूर बळवंतराव जोशी सरन्याया-
 धीश, रावसाहेब गणेश बळवंत जोशी, रावसाहेब विश्वनाथराव गो-
 खले, श्रीमंत बापुसाहेब कागलकर, श्रीमंत बापुसाहेब कुरुंदवाडकर,
 नामदार बाळगंगाधर टिळक, श्रीमंत विनायकराव निलकंठ नातु, डा-

राव द्रवीड; रा. सा. माधवराव कुमठेकर, रा. सा. हरीपंत आपटे, श्रीमंत बाबामहाराज, श्रीमंत बाबासाहेब सांगलीकर, जस्टिस महादेव गोविंद रानडे, डा. मालचंद्र, डा. गर्दे, डा. देशमुख, रा. सा. दाजी आबाजी खरे, रा. सा. गणेश कृष्ण देशमुख रा. सा. नारायण विष्णु बापट, शेट तुकाराम जावजी, रा. सा. रावजी भवानराव पावगी, रा. सा. सोहनी, रा. सा. आपटे इंजिनियर, रा. सा. वर्तक, रा. सा. ऋषि, डेक्कन कालेजस्थ विद्यार्थी इत्यादि मंडळींनी *दरसाल उद्योग करण्याकरितां आश्रय देत जाऊं असें अभिवचन दिल्यामुळे अभीष्ट उद्योगास सुरवात करून हा एका वर्षांत केलेला उद्योग लोकांपुढें ठेवीत आहे.

आपल्या हिंदुस्थानामध्ये श्रीमद्भास्कराचार्य या नांवाचा एक नामांकित ज्योतिषी होऊन गेला. याचा जन्म शके १०३६ मध्ये झाला; यानें सिद्धांत शिरोमणी नामक ग्रंथ शके १०७२ साली तयार केला असें “रसगुणपूर्णमहीसमनृपशकसमयेऽभवन्ममोत्पत्तिः रसगुणवर्षेणमया सिद्धांत शिरोमणी रचितः”॥ याप्रमाणें त्यानें ग्रंथाच्या अखेरीस दिलेल्या पद्यावरून कळतें. यामध्ये लीलावति, बीजगणित, गणिताध्याय व गोलाध्याय असे चार भाग आहेत. यांपैकी लीलावतीचें हें भाषांतर आहे. यामध्ये प्रथमतः कांहीं कोष्टकें सांगून अंकांची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार, वर्ग, वर्गमूळ, घन, घनमूळ, व्यवहारी अपूर्णांक, गणितश्रेढी, भूमितिश्रेढी, क्षेत्रमापन, त्रिकोणाचें क्षेत्रफल, चतुरस्राचें क्षेत्रफल, वर्तुळाचें क्षेत्रफल, गोलपृष्ठफल, गोलघनफल, भुजज्यासाधन, पाक्षिकविपर्यय, सार्वशिकविपर्यय इत्यादि

* टीपः—सर्व आश्रयदात्यांचा नांवें लवकरच प्रसिद्ध करणार आहें.



गणितशास्त्रीय अनेक विषयासंबंधानें उत्तम रीति दिल्या आहेत. त्यांचे श्लोक विद्यार्थ्यांनी पाठ केले असतां विशेष उपयोग होणार आहे.

पूर्वी या भागाचें भाषांतर प्रसिद्ध झालें आहे. परंतु त्यामध्ये उपपत्ति दिली नसल्यामुळे सर्वासच त्याचा फायदा मिळणें अशक्य आहे. कारण ज्यांना उपपत्ति समजावी अशी इच्छा आहे अशा लोकांस त्याचा बिलकूल उपयोग होत नाही, अशी उणीव दृष्टीस पडली ती दूर व्हावी म्हणून हा सोपपत्तिक भाषांतराचा प्रयत्न केला आहे यामध्ये मूळ श्लोक देऊन त्याचा तात्पर्यार्थ दिला आहे. सर्व उदाहरणें सोडवून दाखविली आहेत. व स्वतंत्र उपपत्तीही दिली आहे. बेरीज, वजाबाकी इत्यादि जे विषय नेहमी प्रचारांत येणारे आहेत त्यांची उपपत्ति सुलभ असल्यामुळे मात्र ती येथें दिली नाही, या ग्रंथांतील उपपत्ति तयार करण्याचे कामीं लीलावतीवरील टीकाग्रंथ, पंडित बापूदेव यांच्या टिपण्या, टॉड हंटरचा थोरला अल्जिब्रा, त्रिकोणमिति, मूर्सेमेन्सुरेशन् आणि युक्लीड यांचा विशेष उपयोग झाला, यामध्ये श्रेढीव्यवहार, क्षेत्रव्यवहार आणि अंकपाश हीं प्रकरणें फारच उत्तम आहेत, तीं प्रत्येक विद्वान् गृहस्थानें वांचावीत अशी त्यास मी सूचना करितों. कारण तीं अवलोकनांत आलीं असतां आपल्यामध्ये असलेल्या गणितशास्त्राची प्रौढी सहजलक्ष्यांत येईल.

आचार्यांनी या भागांत कुट्टक प्रकरण दिलें आहे. व तेंच प्रकरण दुसऱ्या भागांत म्हणजे बीजगणितांतही दिलें असल्यामुळे त्याचें भाषांतर व उपपत्तीही मी आपल्या बीजभाषांतरांत दिली आहे त्यांत पहावी.

याप्रमाणें केलेल्या उद्योगाचा लोकांनी उपयोग करून घ्यावा असें मी इच्छितों.

यामध्ये जे दोष असतील त्या संबंधानें मजला विद्वान् लोकांनी कळविल्यास त्याचा योग्य विचार करून पुढील आवृत्तीत सुधारणा करूं.

हें पुस्तक छापण्याच्या कामीं रावसाहेब हरी विनायक साठे यांनीं उत्तम मदत केल्यामुळे मी त्यांचा फार फार आभारी आहे. व साठे यांच्या औदार्याविषयी जितकें वर्णन करावें तितकें थोडेंच होणार आहे. कारण त्यांचा व माझा बिलकूल परिचय नसतां त्यांनीं माझे लिहिलेलें पुस्तक वांचून पाहून केवळ पुस्तकांतील विषयांच्या योग्यतेचें अवलंबन करून छापण्याच्या खर्चाच्या वगैरे कामीं मदत केली हें त्यांस विशेष भूषणास्पद आहे.

हें पुस्तक छत्रेफंड कमिटीचे सेक्रेटरी रा. सा. गोविंद रावजी केळकर यांस दाखविलें. त्यांनीं कमिटीस विचारून २०० रुपये बक्षीस देऊं असें अभिवचन दिलें आहे. व ही गोष्ट वर्तमान-पत्रांतूनही प्रसिद्ध झाली आहे. तेव्हां तें बक्षीस लवकरच मिळेल.

तसेंच रा. सा. बळवंत रामचंद्र सहस्रबुद्धे यांनींही सुमारे १५० रुपये बक्षीस देण्याचें वचन दिलें आहे. तेही आपलें वचन लवकरच शेवटास नेतील अशी आशा आहे.

हा ग्रंथ छापण्याच्या कामीं रा. आत्माराम अनंत आपटे यांनीं मला फार साह्य केले, करितां त्यांचाही मी फार आभारी आहे. मी फिरस्ता असल्याकारणानें छापखान्यांत वेळचे वेळेस मुफें व मूळग्रंथ देऊन काम उरकून घेणें माझ्यानें झालें नसतें. हें सर्व काम रा. आपटे यांनीं बिनबोभाट पार पाडलें.

ग्रंथकर्ता.

अनुक्रमणिका.

—:०:—

विषय.	पृष्ठ.	विषय.	पृष्ठ.
परिभाषाप्रकरण.	३	संक्रमणप्रकरण.	३१
संख्यास्थाननिर्णय.	४	वर्गकर्मप्रकरण.	३४
वेरीज.	४	गुणकर्मप्रकरण.	३७
वजाबाकी.	५	त्रैराशिक.	४२
गुणनप्रकार.	५	पंचराशिक.	४६
भागहार.	८	मिश्रव्यवहार.	५१
वर्ग.	८	श्रेढीव्यवहार.	७८
वर्गमूळ.	११	क्षेत्रव्यवहार.	१००
घन.	१२	खातव्यवहार.	१९०
घनमूळ.	१५	चितिव्यवहार.	१९९
भिन्नपरिकर्माष्टकप्रकरण.	१७	ककचव्यवहार.	२००
शून्यपरिकर्माष्टक.	२४	राशिव्यवहार.	२०३
व्यस्तविधिप्रकरण.	२६	छायाव्यवहार.	२०७
इष्टकर्मप्रकरण.	२७	अंकपाश.	२१८

॥ श्रीगणेशायनमः ॥

लीलावती.

श्लोक—प्रीतिं भक्तजनस्य यो जनयते विघ्नं विनिघ्नन्
स्मृतस्तं वृंदारकवृंदवंदितपदं नत्वा मतंगाननं ॥ पाटीं
सद्गणितस्य वच्मि चतुरप्रीतिप्रदां प्रस्फुटां संक्षिप्ताक्षरको-
मलामलपदैर्लालित्यलीलावतीं ॥ १ ॥

अर्थ—जो सेवकजनाला प्रीति उत्पन्न करितो, व ज्याचे
स्मरण केलें असतां विघ्नाचा नाश होतो, आणि ज्याच्या चर-
णास देवगण नमस्कार करितात अशा गजाननास नमस्कार
करून चतुर लोकांस प्रीति देणारी व स्फुट अशी उत्तम लीला-
वती नामक गणिताची सरणी, संक्षिप्त मधुर व शुद्ध अशा
पदांनीं सांगतां.

श्लोक—बराटकानां दशकद्वयं यत् सा काकिणी ताथ
पणश्चतस्रः ॥ ते षोडश द्रम्य इहावगम्यो द्रम्यैस्तथा
षोडशभिश्च निष्कः ॥

अर्थ.

२० कवड्या	= १ काकिणी (दमडी)
४ काकिणी	= १ पण (पैसा)
१६ पण	= १ द्रम्य (पावली)
१६ द्रम्य	= १ निष्क.

(२)

श्लोक—तुल्या यवाभ्यां कथितात्र गुंजा बल्ल खि-
गुंजा धरणं च तेऽष्टौ ॥ गद्याणकस्तद्द्वयमिन्द्रुलौर्वल्लैस्त-
थैको घटकः प्रदिष्टः ॥

अर्थ.

- २ चव = १ गुंजा
३ गुंजा = १ बल्ल
८ बल्ल = १ धरण.
२ धरण = १ गद्याणक.
१४ बल्ल = १ घटक.

श्लोक—दशार्धगुंजं प्रवदन्ति माषं माषाव्हयैः षोडश-
भिश्च कर्षं ॥ कर्षैश्चतुर्भिश्च पलं तुलाज्ञाः कर्षं सुवर्णस्य
सुवर्णसंज्ञं ॥

अर्थ.

- ५ गुंजा = १ माष.
१६ माष = १ कर्ष.
४ कर्ष = १ पल.

सोन्याच्या कर्षास सुवर्ण म्हणतात.

श्लोक—यवोदरै रंगुल मष्टसंख्यै हस्तोऽंगुलैः पङ्गुणि-
तैश्चतुर्भिः ॥ हस्तैश्चतुर्भिर्धवतीह दंडः क्रोशः सहस्रद्वि-
येन तेषां ॥

अर्थ.

- ८ आडवे यव = १ अंगुल.
२४ अंगुलै = १ हस्त.
४ हस्त = १ दंड.
२००० दंड = १ कोश.

श्लोक—स्याद्योजनं क्रोशचतुष्टयेन तथा कराणां दश-
केन वंशः ॥ निवर्तनं विंशतिवंशसंख्यैः क्षेत्रं चतुर्भिश्च
भुजैर्निबद्धं ॥

अर्थ.

४ कोश = १ योजन.

१० हात = १ वंश.

ज्या चतुरस्रांतील प्रत्येक बाजू २० वंश म्हणजे २०० हात
असते त्या क्षेत्रास निवर्तन असे म्हणतात.

श्लोक—हस्तोन्मितैर्विस्तृतिदैर्घ्यपिंडै र्यद्द्वादशासं प-
नहस्तसंज्ञं ॥ धान्यादिके यद्धनहस्तमानं शास्त्रोदिता
मागधखारिका सा ॥

अर्थ—एक हात लांब, एक हात रुंद व एक हात उंच
असे जे १२ कोपण्यांचे क्षेत्र तयार होते त्यास घनहस्त असे
म्हणतात.

यासच धान्य मापण्याच्या संबधाने मगध देशांत खारिका
म्हणतात.

श्लोक—द्रोणस्तु खार्याः खलु षोडशांशः स्यादाढको
द्रोणचतुर्थभागः ॥ प्रस्थश्चतुर्थांश इहाढकस्य प्रस्थाघ्नि-
राद्यैः कुडवः प्रदिष्टः ॥

अर्थ—खारीच्या सोळाव्या हिस्शास द्रोण, द्रोणाच्या चतु-
र्थांशास आढक, आढकाच्या चतुर्थांशास प्रस्थ, आणि प्रस्थाच्या
चतुर्थांशास कुडव असे म्हणतात.

याप्रमाणे परिभाषा प्रकरणाचे भाषांतर समाप्त झाले.



श्लोक—लीलागललुललोलकालव्यालविलासिने ॥
गणेशाय नमो नीलकमलामलकांतये ॥

अर्थ—आनंदानें गळ्यामध्ये लोळणारे, चंचल, व काळे
बशा सर्पांनीं शोभणारा व नीलकमलाप्रमाणें ज्याची स्वच्छ-
कांति आहे अशा गणपतीस नमस्कार असो.

श्लोक—एकदशशतसहस्रायुतलक्षप्रयुतकोटयः क्रमशः ॥
अर्बुदमब्जं सर्वं निखर्वमहापद्मशंकवस्तस्मात् ॥ जलधि-
शान्त्यं मध्यं परार्धमिति दशगुणोत्तरं संज्ञाः ॥ संख्या-
याः स्थानानां व्यवहारार्थं कृताः पूर्वैः ॥

अर्थ—एकादि दश गुणोत्तर संख्यास्थानाला क्रमानें व्यव-
हाराकरितां एक, दश, शत, सहस्र इत्यादि संज्ञा पूर्वाचार्यांनीं
केलेल्या आहेत.

सूत्र—कार्यः क्रमादुत्क्रमतोऽथवांक्यौगो यथास्थानक
मंतरं वा ॥

अर्थ—बेरीज किंवा वजाबाकी करावयाची असल्यास ती
क्रमानें किंवा उत्क्रमानें अंकस्थानाप्रमाणें करावी.

उद्देशक अथवा उदाहरण—अपे बाले लीलावति मति-
मति ब्रूहि सहितान् द्विपंचद्वारिंशत्त्रिनवतिशताष्टादशदश ॥
शतोपेतानेतानयुतवियुतांश्चापि वद मे यदि व्यक्ते युक्ति-
व्यवकलनमार्गेऽसि कुशला ॥

अर्थ—हे लीलावति तूं बेरीज व वजाबाकी ह्यांच्या रीती-
मध्ये कुशल असशील तर २, ९, ३२, १९३, १८, १०,
१०० या संख्यांची बेरीज सांग ? व ती बेरीज १०,०००
तून वजा करून शेष किति राहिलें हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

यथोक्त क्रिया करून बेरीज ३६० हें उत्तर.

व $१०००० - ३६० = ९६४०$ हें उत्तर.

श्लोक—गुण्यांत्यमकं गुणकेन हन्यादुत्सारितेनैव मुपा-
तिमादीन् ॥ गुण्यस्त्वधो धो गुणखंडतुल्यस्तैः खंडकैः संगु-
णितो युतोवा ॥ भक्तो गुणः लुध्यति येन तेन लब्ध्याच
गुण्यो गुणितः फलंवा ॥ द्विधा भवेद्गुणविभाग एव स्थानैः
पृथग्वा गुणितः समेतः ॥ इष्टोनयुक्तेन गुणेन निघ्नोऽभी
ष्टगुण्यान्वितवर्जितो वा ॥

अर्थ—गुणकार्त्तने गुण्यांतील अंतिमांकास (डावे कडील
पहिल्या अंकास) गुणार्त्तने, नंतर उपांतिम आदीकरून अंकांस
गुणून यथास्थानक बेरीज केली असतां गुणाकार होतो.

अथवा गुणकार्त्ती खंडे (विभाग) करून त्यांनीं पृथक्
गुण्यास गुणून त्या गुणाकारांची बेरीज केली असतां गुणा-
कार होतो.

अथवा ज्या अंकार्त्तने गुणकास निःशेष भाग जाईल, त्यानें
व त्याच्या भागाकार्त्तने गुण्यास अनुक्रमे गुणिलें असतां गुण-
नफल (गुणाकार) येतें.

अथवा गुणकामध्ये जितकीं स्थाने असतील त्यांनीं पृथक्
गुण्यास गुणून यथास्थानक बेरीज केली असतां गुणनफल येतें.

अथवा गुणांतून इष्टांक वजा करून बाकीनें गुण्यास गुणून
तो गुणाकार, इष्टांक व गुण्य यांच्या गुणाकारांत मिळविला
असतां गुणनफल येते.

अथवा गुणकामध्ये इष्टांक मिळवून त्याने गुण्यास गुणून त्यांतून इष्टांक व गुण्य यांचा गुणाकार वजा केला असता गुणनफल येते.

उदाहरण—बाले बालकुरंगलोलनयने लीलावति प्रोच्यतां पंचन्येकमिता दिवाकरगुणा अंकाः कतिस्युर्यदि ॥ रूपस्थानविभागखंडगुणने कल्पासि कल्याणिनि च्छिन्नास्तेन गुणेन तेच गुणिता जाताः कतिस्युर्वद ॥

अर्थ—हे लीलावति १३५ या संख्येस १२ नीं गुणून सर्व प्रकारांनीं गुणाकार किति येईल हे सांगे ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

पहिल्या रीतीने.

गुण्य १३५ व गुणक १२ आहे. त्यांतील गुण्याच्या अंतिमादि अंकांस गुणून.

३६

१२६०

१६२०

गुणाकार हें उत्तर.

दुसऱ्या रीतीने.

गुणकाची ४ व ८ अशीं दोन खंडे करून त्यांनीं गुण्यास गुणून बेरीज केली तर.

$$१३५ \times ४ = ५४०$$

$$१३५ \times ८ = १०८०$$

$$\therefore ५४० + १०८० = १६२० \text{ गुणाकार हें उत्तर.}$$

(७)

तिस-या रीतीने.

गुणक १२ यास ४ ने भागिले असतां भागाकार ३ येतो.
शिल्लक राहत नाही.

$$\therefore 129 \times 4 = 516$$

$$516 \times 3 = 1548 \text{ गुणाकार हें उत्तर.}$$

चवथ्या रीतीने.

१२९

१२

२७०

१२९

१६२०

गुणाकार हें उत्तर.

पाचव्या रीतीने.

गुणक १२ तून इष्टांक ३ वजा करून ९ बाकी राहिली.

$$\therefore 129 \times 9 = 1161$$

$$129 \times 3 = 387$$

$$\therefore 1161 + 387 = 1548 \text{ गुणाकार हें उत्तर.}$$

सहाव्या रीतीने.

गुणकांत इष्टांक ८ मिळवून २० आले.

$$\therefore 129 \times 20 = 2580$$

$$129 \times 8 = 1032$$

$$\therefore 2580 - 1032 = 1548 \text{ हें उत्तर.}$$

सूत्र—भाज्याद्धरः शुध्यति यदुणः स्यादंत्यात्फलं
तत्त्वलु भागहारे ॥ समेन केनाप्यपवर्त्य हारभाज्यौ भजे-
द्वा सति संभवे तु ॥

अर्थ—ज्या संख्येनें भाजकास गुणून तो गुणाकार भाज्यांतून
वजा जाईल त्या संख्येस भागाकार अथवा भजनफल म्हणतात.

भाज्य व भाजक यांस एखाद्या संख्येनें संक्षेप जाण्याचा
संभव असल्यास तो देऊन क्रिया केली असता उत्तर बरोबर येते.

जसें भाज्य १६२० भाजक १२ आहे असें घरा. येथे
भाजक १२ यास १३५ या संख्येनें गुणून आलेला गुणाकार
भाज्यांतून निःशेष वजा जातो म्हणून १३५ हें भजनफल
झालें. अथवा भाज्यभाजकांस ३ चा संक्षेप देऊन भाज्य ५४०
व भाजक ४ झाला. येथेही भाजकास १३५ नीं गुणिलें असतां तो
भाज्यांतून निःशेष वजा जातो म्हणून १३५ हें भजनफल झालें.

सूत्र—समाद्विघातः कृतिरुच्यतेथ स्थाप्योऽस्यवर्गो
द्विगुणांत्यनिघ्नाः ॥ स्वस्वोपरिष्ठाच्च तथा परेकास्त्यक्तवांत्य
मुत्सार्य पुनश्च राशि ॥ खंडद्वयस्याऽभिहति द्विनिघ्नी
तत्खंडवर्गैक्ययुता कृतिर्वा ॥ इष्टोनयुग्राशिवधः कृतिः
स्यादिष्टस्य वर्गेण समन्वितोवा ॥

अर्थ—दोन समान संख्यांच्या गुणाकारास वर्ग असें
म्हणतात.

ज्या संख्येचा वर्ग करावयाचा असेल त्यातील अंत्यांकाचा
वर्ग मांडून अंत्यांकाच्या दुपटीनें अन्य अंकांस गुणून एकाधिक-
स्थानाने गुणाकार मांडून बेरीज करावी, नंतर अंतिमांक टाकून
देऊन जी संख्या राहिल तिला ही पूर्वोक्त क्रिया करून जी बेरीज

येईल ती पहिल्या बेरजेच्या वर एकाधिक स्थानाने मांडून बेरीज करावी. अशीच क्रिया आद्यंकापर्यंत करित गेल्याने इष्ट संख्येचा वर्ग येतो.

अथवा इष्ट संख्येचीं दोन खंडे करून त्या खंडांच्या वर्गांच्या बेरजेमध्ये खंडांच्या गुणाकाराची दुप्पट मिळविली असतां इष्ट संख्येचा वर्ग होतो.

अथवा ज्या संख्येचा वर्ग करावयाचा असेल त्यासंख्येतून इष्टांक वजा करून व मिळवून ज्या संख्या होतील त्यांच्या गुणाकारामध्ये इष्टांकांचा वर्ग मिळविला असतां संख्येचा वर्ग होतो.

श्लोक—सखे नवानां च चतुर्दशानां ब्रूहि त्रिहीनस्य त्रयस्य ॥ पंचोत्तरस्याप्युतस्य वर्गं जानासि चैव द्वर्गं विधानमार्गं ॥

अर्थ—९, १४, २९, १०००९ या संख्यांचे वर्ग सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

प्रथम २९ संख्येचा वर्ग करूं. यांतील अंत्यांक २ याचा वर्ग ४ व अंतिमांकाची दुप्पट ४ हिनें बाकी ९७ अंकास गुणून एकाधिकस्थानाने मांडून बेरीज केली तर.

३२

४६८

७८८

बेरीज झाली.

नंतर अंतिमांक २ हा टाकून देऊन बाकी ९७ राहिली

यांतील अंत्यांक ९ याचा वर्ग ८१ व अंतिमांकाची दुप्पट १८
हिने ७ स गुणून एकाधिक स्थानाने मांडून

१२

८१६

९३६

बेरीज झाली

ही मागील बेरेजेवर एकाधिक स्थानाने मांडून बेरीज.

९३

७८८६

८८१६

नंतर अंतिमांक ९ टाकून ७ हा अंत्यांक झाला याचा वर्ग
बरील बेरजेत मिळवून.

४

८८१६९

८८२०९

वर्ग हो. उत्तर.

आता ९ या संख्येचा वर्ग दुसऱ्या रीतीने कर

$$(९)^2 = (४ + ५)^2$$

$$= १६ + २५ + ४०$$

$$= ८१ \quad \text{वर्ग हो. उत्तर}$$

आता १४ संख्येचा वर्ग तिसऱ्या रीतीने कर.

$$१४^2 = ६ धरून$$

(११)

$$\begin{aligned}
 (१४)^३ &= (१४-६) (१४ + ६) + (६)^२ \\
 &= ८ \times २० + ३६ \\
 &= १९६ \quad \text{वर्ग. हें उत्तर.}
 \end{aligned}$$

याच पद्धतीनें अन्य संख्येचे वर्ग करावेत.

सूत्र—त्यक्त्वांस्त्या द्विषमात् कृतिं द्विगुणये न्मूलं समे
तत्पृते त्यक्त्वा लब्धकृतिं तदाद्यविषमा लब्धं द्विनिघ्नं
न्यसेत् ॥ पंक्त्यां पंक्तिहते समेन्यविषमात् त्यक्त्वाप्तवर्ग
फलं पंक्त्यां तद्विगुणं न्यसेदिति मुहुः पंक्ते र्दलंस्यात् पदं॥

अर्थ— ज्या संख्येचें वर्गमूळ काढावयाचें असेल त्यांतील
उजवीकडून डावीकडे प्रत्येक अंकावर क्रमानें विषम (उभीरेषा)
व सम (आडवीरेषा) अशा खुणा करून त्यांतील अंत्य विषमां-
तून ज्या संख्येचा वर्ग वजा जाईल तो वर्ग वजा करावा. आणि
त्या वर्गाच्या मूळाची दुप्पट एका बाजूस मांडून ठेवावी. तिनें
समास भागून आलेल्या भागाचा वर्ग, बाकीवर पुढील विषमांक
घेऊन त्यांतून, वजा करावा. व भागाची दुप्पट, पूर्वी एका
बाजूस मांडून ठेवलेल्या दुपटीमध्ये एकाधिक स्थानानें मिळवावी.
नंतर त्या आलेल्या पंक्तीनें पुनः समास भागून आलेल्या भागाचा
वर्ग, बाकीवर पुढील विषमांक घेऊन त्यांतून, वजा करावा. व
भागाची दुप्पट, पूर्वी एका बाजूस मांडलेल्या पंक्तीमध्ये एकाधिक
स्थानानें मिळवावी. याप्रमाणेंच अंक समाप्तीपर्यंत क्रिया करून
जी पंक्ती होईल तिचें अर्ध केलें असतां वर्गमूळ येतें.

उदाहरण—मूलं चतुर्णांच तथा नवानां पूर्वं कृतानांच
सखे कृतीनां ॥ पृथक् पृथक् वर्गपदानि वित्ति बुत्वे
विट्ति यदि तेऽत्र जाता ॥

अर्थ—४, ९, ८१, १९६, ८८२०९, यांचो वर्गमूल

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

पंक्ति.	संख्या.
$२ \times २ = ४$	$\begin{array}{r} ८८२० \\ ४ \end{array}$
$९ \times २ = १८$	$\begin{array}{r} ४) ४८ (९ \\ ३६ \\ १२२ \\ ८१ \end{array}$
$७ \times २ = १४$	$\begin{array}{r} ९८) ४१० (४ \\ ४०६ \\ ४९ \\ ४९ \\ ०० \end{array}$
५९४	
याचें अर्ध २९७वर्गमूल हें उत्तर.	

याच पद्धतीने अन्य उत्तरे काढावी.

सूत्रं—समन्विधातश्च घनः प्रदिष्टः स्थाप्यो घनो
ततोऽत्यवर्गः ॥ आदित्रिनिघ्नस्तत आदिवर्ग
तोऽथादिघनश्च सर्वे ॥ स्थानान्तरत्वेन युता घनः
प्रकल्प्य तत् खंडयुगं ततोऽत्यं ॥ एवं मुहुर्वर्गघनप्र
वाद्यांकतोवा विधिरेष कार्यः ॥ खंडाभ्यां बाह्यतो
स्त्रिघ्नः खंडघनैक्ययुक् ॥ वर्गमूलघनस्वघ्नो वर्गराशेर्वनो

अर्थ—तीन समान संख्यांच्या गुणाकारास घन म्ह
ज्या संख्येचा घन करावयाचा असेल त्यांतील अंत्य

घन स्थापन करावा. त्याखाली एकधिकस्थानाने अंत्याचे वर्गास आद्यंकांने गुणून त्याची तिप्पट मांडावी. त्या खाली आदिवर्गास अंत्याने गुणून त्याची तिप्पट मांडावी. त्या खाली आदीचा घन मांडून अंकस्थानाप्रमाणे बेरीज करावी. ही संख्येतील अक्षरच्या दोन अंकांचा घन होतो नंतर त्या दोन अंकांस अंत्य करून व पुढील अंकांस आदि करून वर सांगितलेली क्रिया पुनः पुनः केली असतां सर्व संख्येचा घन होतो. हीच क्रिया आद्यांकांस अंत्यांक मानून जरी केली तरी घन येतो.

अथवा संख्येची दोन खंडे करून तीं खंडे व संख्या यांचे गुणाकाराची तिप्पट, खंडांच्या घनांच्या बेरीजेत मिळविली असतां घन होतो.

वर्गराश्यात्मक संख्येचा घन करावयाचा असल्यास त्या वर्गराशीचे वर्गमूळ काढून त्याचा घन करून त्या घनाचा वर्ग केला असतां वर्गराशीचा घन होतो.

उदाहरणम्—नवघनं त्रिघनस्य घनं तथा कथं पंचघनस्य घनं च मे ॥ घनपदं च ततोऽपि घनात्सखे यदि घनेऽस्ति घना भवती मतिः ॥

अर्थ—९, २७, १२९ या संख्यांचे घन काय होतात हे सांग! व ने घन होतील त्यांची घनमूळे पुढच्या सूत्रात दिलेल्या रीतीने काढ !

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

१२९ या संख्येचा घन करू.

अंत्य १ याचा घन = १

अंश १ चा वर्ग \times आदि १ \times १ = १

(१४)

$$\text{आदि २ चा वर्ग } ४ \times \text{अंत्य } १ \times ३ = १२$$

$$\text{आदि २ चा घन} = \underline{\quad ८ \quad}$$

$$१२ \text{ चा घन} \quad १७२८$$

आतां अंत्य १२ व आदि ९ घरून क्रिया पुनः करूं.

$$१२^३ = १७२८$$

$$१२^२ \times ९ \times ३ = २१६०$$

$$९ \times १२ \times ३ = ९००$$

$$९^३ = \underline{\quad १२९ \quad}$$

$$१२९ \text{ चा घन} \quad १९९३१२९$$

आतां २७ चा घन करूं.

यांत आद्यांकास अंत्यांक मानून पूर्वोक्त क्रिया केळी तर,

$$७^३ = ३४३$$

$$७ \times २ \times ३ = २९४$$

$$२ \times ७ \times ३ = ८४$$

$$२^३ = \underline{\quad ८ \quad}$$

$$१९९८३ \text{ हा घन झाला.}$$

आतां ९ चा घन दुसऱ्या रीतीनें करूं.

९ चीं ४ व ९ अशीं खंडें करून.

$$४ \times ९ \times ९ = १८०$$

$$\therefore ४ + ९ + ३ \times १८० = ७२९$$

हा ९ चा घन झाला.

अथवा ९ हा वर्गराशी आहे. याचें मूळ ३ याचा घन २७ याचा वर्ग ७२९ हा ९ चा घन झाला.

सूत्रम्—आद्यं घनस्थानमथाऽघने द्वे पुनस्तथात्वाद्घनतो
विशोध्यं ॥ घनं पृथक्स्थं पदस्य कृत्या त्रिभया तदाऽद्यं
विभजेत्फलं तु ॥ पंक्त्यां न्यसेत्तत्कृतिमंत्यनिघ्नीं त्रिघ्नीं
त्यजेत् तत्प्रथमात्फलस्य घनं तदाद्यात्घनमूलमेवं पं-
क्तिर्भवेदेवमतः पुनश्च ॥

अर्थ—ज्या संख्येचें घनमूल काढावयाचें असेल तिच्या
आद्यांकास घनस्थान (उभीरेषा) दुसऱ्या व तिसऱ्या अंकास
अघनस्थान (आडवीरेषा) अशा खुणा करून पुढेही याच
पद्धतीने खुणा कराव्या. नंतर अंत्य घनस्थानांतून जी घनसंख्या
वजा जात असेल ती वजा करावी. व त्या घन संख्येचें मूल
निराळें मांडावें. नंतर मूळाच्या वर्गाच्या तिपटीने, बाकीवर
अंत्यघनस्थानापुढील एक अंक घेऊन त्यास भागावें. भाग
येईल तो, पंक्तीमध्ये म्हणजे पूर्वी निराळें मूल मांडून ठेविलें आहे
त्यापुढें मांडावा. नंतर भागाच्या वर्गास पंक्तीतील अंत्यांकांनै
गुणून तिप्पट करावी. ती तिप्पट बाकीवर पुढील एक अंक
घेऊन त्यांतून वजा करावी. पुनः बाकीवर पुढील घनस्थानात्मक
एक अंक घेऊन त्यांतून भागाचा घन वजा करावा. याच पद्धतीने
पुढेही करून जी पंक्ति तयार होईल तेंच घनमूल होतें.

जैसे.—१९६८३ या संख्येचें घनमूळ काढूं.

$$३ = ८$$

$$३ \times ३ = १२$$

$$७ \times २ \times ३ = २९४$$

$$७ = ३४३$$

संख्या पंक्ति (घनमूळ)

१९६८३ (२७)

८

११६

८४

३२८

२९४

३४३

३४३

०००

उदाहरण दुसरें.

$$१ = १$$

$$१ \times ३ = ३$$

$$२ \times १ \times ३ = १२$$

$$२ = ८$$

$$१२ \times ३ = ४३२$$

$$६ \times १२ \times ३ = २१६$$

$$६ = १२९$$

संख्या.

मूळ.

१९६३१२९ (१२९)

१

०९

६

३६

१२

२३३

८

२२९१

२१६०

(१७)

९१२
९००
—
१२९
१२९
—
०००

याप्रमाणें परिकर्माष्टकाचें (बेरीज, वजावाकी, गुणाकार, भागाकार, वर्ग, वर्गमूळ, घन व घनमूळ, या आठ प्रकारांचें) भाषांतर समाप्त झालें.

कुतुम्हेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

अथ भिन्नपरिकर्माष्टकप्रकरणम्.

व्यवहारी अपूर्णाकांची बेरीज, वजावाकी, गुणाकार, भागाकार, वर्ग, वर्गमूळ, घन, घनमूळ या आठ प्रकारांस भिन्नपरिकर्माष्टक असें म्हणतात.

सूत्रम्—अन्योन्यहाराभिहतौ हरांशौ राश्योः समच्छेद-
विधानमेवम् ॥ मिथो हराभ्यामपवर्तिताभ्यां यद्वा हरांशौ
सुधियाऽत्र गुण्यौ ॥

अर्थ—वर अंश व खाली छेद अशा प्रकारच्या भागजाती अपूर्णाकांस समच्छेद रूप द्यावयाचें असल्यास, एकाच्या अंशच्छेदांस दुसऱ्याच्या छेदानें गुणावें व दुसऱ्याच्या अंशच्छेदांस पहिल्याच्या छेदानें गुणावें. दोहोंपेक्षां अधिक अपूर्णाक असल्यास याचप्रमाणें करीत गेल्यानें सर्व अपूर्णाकांस समच्छेद रूप प्राप्त होतें.

अपूर्णाकांचें छेदास समान अंकांनं मागून जे भागाकार येतील

त्यानीं परस्पर अपूर्णाकांचे अंशच्छेदांस गुणित्यानेंही समच्छेद रूप प्राप्त होतें.

उदाहरणम्—रूपत्रयं पंचलवस्त्रिभागो योगार्थमेतान्वद तुल्यहारान् ॥ त्रिषष्टिभागश्च चतुर्दशांशः समच्छिदौ मित्र वियोजनार्थम् ॥

अर्थ— $\frac{३}{४}$, $\frac{२}{३}$, $\frac{१}{२}$ या अपूर्णाकांस समच्छेद रूप देऊन बेरीज काय होईल? व $\frac{३}{४}$, $\frac{२}{३}$ यांस समच्छेद रूप देऊन वजाबाकी किति होईल हें सांग !

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$\frac{३}{४}$, $\frac{२}{३}$, $\frac{१}{२}$ या अपूर्णाकांपैकी $\frac{३}{४}$ याच्या अंशच्छेदांस दुसऱ्यांच्या ५ व ३ या छेदांनी गुणून $\frac{१५}{४}$ आले. तसेंच $\frac{२}{३}$ याच्या अंशच्छेदांस दुसऱ्यांच्या १ व ३ या छेदांनी गुणून $\frac{४}{३}$ आले व $\frac{१}{२}$ याच्या अंशच्छेदांस १ व ५ या छेदांनी गुणून $\frac{६}{२}$ आले. झणून $\frac{१५}{४}$, $\frac{४}{३}$, $\frac{६}{२}$ हे तिन्ही समच्छेद झाले.

$$\therefore \frac{१५}{४} + \frac{४}{३} + \frac{६}{२} = \frac{५३}{१२} \text{ हें उत्तर.}$$

आतां दुसऱ्या उदाहरणामध्ये $\frac{३}{४}$ व $\frac{२}{३}$ यांच्या ६३ व १२ या छेदांस ७ नीं मागून भागाकार ९ व २ आले. यांनीं परस्पर अंशच्छेदांस गुणून $\frac{३}{४} \times \frac{२}{३} = \frac{१२}{२४}$ व $\frac{२}{३} \times \frac{३}{४} = \frac{१२}{२४}$ असे समच्छेद झाले.

$$\therefore \frac{१२}{२४} - \frac{१२}{२४} = \frac{१२}{२४} = \frac{१}{२} \text{ हें उत्तर.}$$

सूत्रम्—लवा लवघ्नाश्च हरा हरघ्ना भागप्रभागेषु सवर्णनं स्यात् ॥

अर्थ—ज्या ठिकाणीं अंशांचे अंश असतात अशा प्रमाणाजाती अपूर्णाकांमध्ये अंशांनीं अंशांस गुणून जो गुणाकार येईल तो अंशस्थानीं, व छेदांनीं छेदांस गुणून जो गुणाकार येईल तो छेदस्थानीं मांडिला असतां भागजाती एक अपूर्णाक होतो.

उदाहरणम्—द्रुमार्धत्रिलवद्वयस्य सुषते पादत्रयं यद्भवे-
त्तत्पंचांशकषोडशांशचरणः संप्रार्थितेनार्थिने ॥ दत्तो येन
वराटकाः कति कदर्येणार्पितास्तेन मे ब्रूहि त्वं यदि वेत्सि
वत्स गणिते ज्ञातिं प्रभागाभिधाम् ॥

अर्थ—एका कृपण मनुष्याने याचकाला १ द्रुमाचा
 $\frac{1}{2}$ चे $\frac{1}{3}$ चे $\frac{1}{4}$ चे $\frac{1}{5}$ चे $\frac{1}{6}$ चे $\frac{1}{7}$ चे इतके द्रव्य दिले. तर त्याच्या
किति कवढ्या होतील हें सांग!

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{3360} = \frac{1}{3360}$$

द्रुम झाला.

$$\therefore \frac{1}{3360} \times \frac{20}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{15}{3} = \frac{1}{3360} \times 1000 = 1 \text{ कवडी हें उत्तर.}$$

सूत्रम्—छेदघ्नरूपेषु लवा धनर्णपेकस्य भागा अधिकोन-
काश्चेत् ॥ स्वांशाधिकोनः खलु यत्र तत्र भागानुबंधे च
लवापवाहे ॥ तलस्थहारेण हरं निहन्यात्स्वांशाधिकोनेन
तु तेन भागान् ॥

अर्थ—ज्या पूर्णाकामध्ये एकाचा कांही भाग अधिक असतो
त्यांस भागानुबंध पूर्णाक म्हणतात. जसे, $9 + \frac{1}{2}$ हा भागानुबंध
पूर्णाक होय. हाच भागानुबंध पूर्णाक $9 \frac{1}{2}$ असाही लिहितात.
याच्या पूर्णाकास अपूर्णाकांच्या छेदाने गुणून त्यांत त्याचा अंश
मिळविला असतां मुख्य अपूर्णाकांचें रूप येतें. ∴ वरील भागानु-
बंध $9 \frac{1}{2}$ पूर्णाक $9 \frac{1}{2}$ असा अपूर्णाक झाला.

जे पूर्णाक एकाच्या कांही भागांने कमी असतो त्यास भागा-
पवाहपूर्णाक म्हणतात. जसे $9 - \frac{1}{2}$ हा भागापवाहपूर्णाक झाला.
याच्या पूर्णाकास अपूर्णाकांच्या छेदाने गुणून त्यांतून त्याचा

अंश वजा करावा. असे केल्याने खऱ्या अपूर्णाकाचे स्वरूप येते. म्हणून वरील १- $\frac{1}{2}$ यास $\frac{1}{2}$ हे अपूर्णाक स्वरूप आले.

ज्यावेळीं राशि त्याच्या अंशाने म्हणजे स्वांशाने अधिक असतो त्यावेळीं त्यास स्वांशानुबंधअपूर्णाक, व उणा असतो त्यावेळीं त्यास स्वांशपवाहअपूर्णाक असे म्हणतात. अशा वेळीं मूळचा राशि अपूर्णाकात्मक वर मांडून त्याचे खाली त्याचा अंश मांडावा. असे दोन अपूर्णाक एकाखाली एक होतील. नंतर खालच्याचे छेदांत त्याचाच अंश, अधिक असल्यास मिळवावा व उणा असल्यास वजा करावा. नंतर आलेल्या संख्येने वरच्याच्या अंशास गुणून आलेला गुणाकार अंशाचे जागी मांडावा. व खालच्याच्या छेदाने वरच्याच्या छेदास गुणून आलेला गुणाकार छेदस्थानी मांडावा. म्हणजे एक अपूर्णाक होईल.

उदाहरणम्—सांघ्रिद्वयं त्रयं व्यंग्रि कीदृग्ब्रूहि सवर्णितम्॥
जानास्यंशानुबंधं चेत्तथा भागापवाहनम् ॥ अंग्रिः स्वत्र्यं-
शयुक्तः सनिजदलयुतः कीदृशः कीदृशौ द्वौ त्र्यंशौ स्वा-
ष्टांशहीनौ तदनुच रहितौ तौ त्रिभिः सप्तभागेः ॥ अर्थ
स्वाष्टांशहीनं नवभिरथ युतं सप्तमांशैः स्वकीयैः कीदृक्
स्याद्ब्रूहि वेत्ति त्वमिह यदि सत्वेऽशानुऽबंधापवाहौ ॥

अर्थ—उदाहरण पहिले—२ $\frac{1}{2}$ या भागानुबंध अपूर्णाकास सरळ रूप देऊन कसा होतो ?

उ० २ रें.— ३ $\frac{1}{2}$ या भागापवाह अपूर्णाकास सरळरूप देऊन कसा होतो हे सांग ?

उ० ३ रें.— $\frac{1}{2}$ त त्याचाच $\frac{1}{2}$ मिळवून जी संख्या होईल तीत तिचा $\frac{1}{2}$ मिळविला तर काय होईल, हे सांग ?

उ० ४ थें.— $\frac{२}{३}$ तून त्याचाच $\frac{१}{३}$ वजा करून जी संख्या होईल तीतून तिचे $\frac{३}{४}$ वजा केले तर काय होईल ?

उ० ५ वें.— $\frac{१}{३}$ तून त्याचाच $\frac{१}{३}$ वजा करून जी संख्या होईल तीमध्ये तिचे $\frac{३}{४}$ मिळविले तर काय होईल हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$२\frac{२}{३} = ४ \times \frac{२}{३} + १ = \frac{९}{३} \text{ हें उत्तर.}$$

$$३ - \frac{१}{३} = ४ \times \frac{३}{४} - १ = \frac{११}{४} \text{ हें उत्तर.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{मूळराशि } \frac{१}{३} + \\ \text{त्याचाच } \frac{१}{३} \end{array} \right\} = \frac{(३ + १) \times १}{४ \times ३} = \frac{१}{३}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{पुनः } \frac{१}{३} \\ + \text{ त्याचा } \frac{१}{३} \end{array} \right\} = \frac{(२ + १) \times १}{३ \times २} = \frac{१}{२} \text{ हें उत्तर.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{मूळ राशी } \frac{२}{३} \\ - \text{ त्याचा } \frac{१}{३} \end{array} \right\} = \frac{(८ - १) \times २}{८ \times ३} = \frac{७}{१२}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{पुनः } \frac{७}{१२} \\ - \text{ त्याचे } \frac{३}{४} \end{array} \right\} = \frac{(७ - ३) \times ७}{१२ \times ७} = \frac{१}{३} \text{ हें उत्तर.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{मूळ राशी } \frac{१}{३} \\ - \text{ त्याचा } \frac{१}{३} \end{array} \right\} = \frac{(८ - १) \times १}{८ \times २} = \frac{७}{१६}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{पुनः } \frac{७}{१६} \\ + \text{ त्याचा } \frac{३}{४} \end{array} \right\} = \frac{(९ + ७) \times ७}{१६ \times ७} = १ \text{ हें उत्तर.}$$

सूत्रम्—योगोऽतरं तुल्यहरांशकानां कल्प्यो हरो रूप-
महारराशेः ॥

अर्थ—व्यवहारी अपूर्णाकांची बेरीज किंवा वजाबाकी करणे
माल्यास, ज्या पूर्णाकास छेद नाही त्यास १ छेद कल्पना

करून समच्छेद करावा नंतर अंशांची बेरीज किंवा वजाबाकी करून अंशस्थानी मांडावी व छेदस्थानी समच्छेद लिहावा.

उदाहरणम्—पंचांशपादत्रिलवार्धषष्ठानेकीकृतान्मूहि सखे ममैतान् ॥ एभिश्च भागैरथ वर्जितानां किं स्यात्तयाणां कथयाऽऽशु शेषम् ॥

अर्थ—१, ३, ३, ३ व ३ यांची बेरीज सांग ! व आलेली बेरीज ३ तून वजा करून बाकी सांग !

उत्तरनिष्काशनक्रिया—

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} = \frac{13}{3} + \frac{15}{3} + \frac{20}{3} + \frac{30}{3} + \frac{30}{3} = \frac{101}{3}$$

बेरीज ३ उत्तर.

$$\frac{101}{3} - \frac{100}{3} = \frac{101-100}{3} = \frac{1}{3} \text{ बाकी है उत्तर.}$$

सूत्रम्—अंशादतिच्छेदवधेन भक्ता लब्धं विभिन्ने गुणने फलं स्यात् ॥

अर्थ—व्यवहारी अपूर्णाकांचा गुणाकार करावयाचा असल्यास अंशांचा गुणाकार करून तो अंशस्थानी मांडावा व छेदांचा गुणाकार करून तो छेदस्थानी मांडावा म्हणजे गुणाकार होतो.

उदाहरणम्—सत्र्यंशरूपद्वितयेन निघ्नं सप्तसप्तमांशद्वितयं भवेत्किम् ॥ अर्थ त्रिभागेण हतं च विद्धि दक्षोऽसि भिन्ने गुणनाविधौ चेत् ॥

अर्थ—२३ ने २३ ला, आणि ३ ने ३ ला गुणून गुणाकार काय होतील हे सांग !

(२३)

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$२\frac{१}{३} \times २\frac{३}{४} = \frac{२ \times ३ + १}{३} \times \frac{७ \times २ + ३}{४} = \frac{७}{३} \times \frac{१५}{४} = ५$ गुणाकार
हैं उत्तर.

$\frac{३}{४} \times \frac{१}{३} = \frac{१}{४}$ गुणाकार हैं उत्तर.

सूत्रम्—छेदं लवं च परिवर्त्य हरस्य शेषः कार्योऽथ भाग-
हरणे गुणनाविधिश्च ॥

अर्थ—व्यवहारी अपूर्णाकांचा भागाकार करावयाचा अस-
ल्यास, भाजकाचे छेदास अंशस्थानी मांडून, व अंशास छेद-
स्थानी मांडून गुणाकार करावा म्हणजे भागाकार होतो.

उदाहरणम्—सत्र्यंशरूपद्वितयेन पंच त्र्यंशेन षष्ठं वद मे
विभज्य ॥ दर्भीयगर्भाग्रसुतीक्ष्णबुद्धिश्चेदास्ति ते भिन्न-
हतौ समर्था ॥

अर्थ— $२\frac{१}{३}$ ने ५ स, आणि $\frac{१}{३}$ ने $\frac{१}{३}$ स भागून भागा-
कार काय होतील हें सांग :

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$५ \div २\frac{१}{३} = ५ \div \frac{३ \times २ + १}{३} = ५ \div \frac{७}{३} = \frac{५}{१} \times \frac{३}{७} = \frac{१५}{७}$ भागा-
कार हें उत्तर.

$\frac{१}{३} \div \frac{१}{३} = \frac{१}{३} \times \frac{३}{१} = १$ भागाकार हें उत्तर.

सूत्रम्—वर्गे कृती घनविधौतु घनौ विधेयौ ॥ हारांशयो
रथपदे च पदप्रसिद्धौ ॥

अर्थ—व्यवहारी अपूर्णाकाचा वर्ग, घन, वर्गमूळ, व घन-
मूळ काढणे झाल्यास अंशाचे वर्गादिक करून अंशस्थानी
मांडावे; व छेदाचे वर्गादिक करून छेदस्थानी मांडावे म्हणजे
वर्गादि होतें,

उदाहरणम्—सार्धत्रयाणां कथयाऽऽद्यु वर्गं वर्गात्ततो व
र्गपदं च मित्र ॥ घनं च मूलं च घनात्ततोऽपि जानासि चे
द्गर्घनौ विभिन्नौ ॥

अर्थ— $३\frac{१}{३}$ चा वर्ग, आणि जो वर्ग होईल त्याचे
वर्गमूळ, तसेच $३\frac{१}{३}$ चा घन, व जो घन होईल त्याचे घनमूळ
काय होईल ते मला सांग ?

उत्तरमिच्छाशानक्रिया.

$$\left(३\frac{१}{३} \right)^२ = \left(\frac{३ \times ३ + १}{३} \right)^२ = \left(\frac{१०}{३} \right)^२ = \frac{१००}{९} \text{ वर्ग है उत्तर.}$$

$$\sqrt{\frac{१००}{९}} = \frac{१०}{३} \text{ वर्गमूळ है उत्तर.}$$

$$\left(३\frac{१}{३} \right)^३ = \left(\frac{१०}{३} \right)^३ = \frac{१० \times १० \times १०}{३ \times ३ \times ३} = \frac{३४३}{२७} \text{ घन है उत्तर.}$$

$$\sqrt[३]{\frac{३४३}{२७}} = \frac{१०}{३} \text{ घनमूळ है उत्तर.}$$

याप्रमाणे भिन्नपरिकर्माष्टकांचे भाषांतर समाप्त झाले.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

अथ शून्यपरिकर्माष्टकप्रकरणम्.

सूत्रम्—योगे खं क्षेपसमं वर्गादौ खं स्वभाजितो
राशिः ॥ खहरः स्यात्खगुणः खं खगुणश्चित्यश्च क्षेप-
विधौ ॥ शून्ये गुणके जाते खं हारश्चेत्पुनस्तदा राशिः ॥
अविकृत एव ज्ञेयस्तथैव खेनोनितः खयुतः ॥

अर्थ—शून्यामध्ये कोणतीही संख्या मिळविली असता त्या
संख्येइतकीच बेरीज होते. शून्याचा वर्ग, वर्गमूळ, घन, व

घनमूळ ही सर्व शून्यच होतात. शून्याने कोणत्याही संख्येस भागिले तर संख्या अशी किंमत समजावी म्हणजे ती अनंत आहे असे जाणावे. शून्याने कोणत्याही संख्येस गुणिले तर गुणाकार शून्य येतो. परंतु कोणत्याही संख्येस शून्य गुणक असून पुढे त्याच संख्येस शून्य भाजक होण्याचा संभव असल्यास त्या संख्येस विकार होत नाही म्हणजे जशीची तशीच संख्या राहते. तसेच कोणत्याही संख्येमध्ये शून्य मिळविले किंवा वजा केले असता त्या संख्येस विकार होत नाही.

उदाहरणम्—खं पंचयुगभवति किं वद स्वस्य वर्गे मूलं घनं घनपदं खगुणाश्च पंच ॥ खेनोद्धृता दश च कः खगुणे निजार्थयुक्तस्त्रिभिश्च गुणितः सहस्रत्रिषष्टिः ॥

अर्थ—शून्यांत ५ मिळविले तर बेरीज काय ? शून्याचा वर्ग, वर्गमूळ, घन, व घनमूळ काय ? शून्याने ५ स गुणिले तर गुणाकार काय ? शून्याने १० स भागिले तर भागाकार काय ? आणि एका संख्येला शून्याने गुणून त्यांत त्या संख्येने अर्ध मिळविले नंतर त्यास ३ नी गुणून शून्याने भागिले असता १३ येतात तर ती संख्या कोणती ते सांग !

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\begin{aligned}
 0 + 5 &= 5 \\
 (0)^2 &= 0 \\
 (0)^3 &= 0 \\
 \sqrt{0} &= 0 \\
 \sqrt[3]{0} &= 0 \\
 5 \times 0 &= 0 \\
 \frac{0}{5} &= \text{अनंत } \infty
 \end{aligned}$$

ही उत्तरे

(२६)

$$\left(\frac{\text{अज्ञातराशि} \times ० + \frac{\text{अज्ञातराशि} \times ०}{२}}{०} \right)^3 = ६३$$

$$\therefore \frac{६ \text{ अज्ञातराशि} \times ० + ३ \text{ अज्ञातराशि} \times ०}{२ \times ०} = ६३$$

शून्याचा संक्षेप देऊन

$$१ \text{ अज्ञातराशि} = ६३ \times २$$

$$\therefore \text{अज्ञातराशि} = १२ \text{ संख्या हें उत्तर.}$$

व्यस्तविधिप्रकरणम्.

सूत्रम्—छेदं गुणं गुणं छेदं वर्गं मूलं पदं कृतिम् ॥
ऋणं स्वं स्वमृणं कुर्याद्दृश्ये राशिप्रसिद्धये ॥ अथ स्वां-
शाधिकोने तु लब्धाढ्योनो हरो हरः ॥ अंशस्त्वविकृतस्तत्र
विलोमे शेषमुक्तवत् ॥

अर्थ—दृश्य संख्येस उलट क्रमानें भाजक असल्यास
गुणक, गुणक असल्यास भाजक, वर्ग असल्यास वर्गमूल, वर्ग-
मूल असल्यास वर्ग, ऋण असल्यास धन, धन असल्यास
ऋण करावें म्हणजे मूल संख्या येते. तसेच कोणत्याही
संख्येचा अंश मिळविण्यास किंवा वजा करण्यास सांगितला
असतां त्याचे छेदांत त्यांचा अंश मिळवून किंवा वजा करून
जें येईल तो स्पष्ट छेद कल्पून अंश तोच समजावा. नंतर
पूर्वोक्त व्यस्तक्रिया करावी.

उदाहरणम्—यस्त्रिघ्नस्त्रिभिरन्वितः स्वचरणैर्मक्तस्ततः
सप्तभिः स्वज्यंशेन विवर्जितः स्वगुणितो हीनो द्विपंचा-

शता ॥ तन्मूलेऽष्टयुते हते च दशभिर्जातं द्वयं ब्रूहि तं राशि-
वेत्सि हि चंचलासि विमलां बाले विलोमक्रियाम् ॥

अर्थ—जिला ३ नीं गुणून त्यांत त्याचे $\frac{3}{4}$ मिळवून जी वेरीज येईल तिला ७ नीं भागून भागाकारांतून त्याचा $\frac{1}{2}$ वजा केला. नंतर शेषाचा वर्ग करून त्यांतून ५२ वजा केले; बाकीचे वर्गमूळ काढून त्यांत ८ मिळवून १० नीं भागिलें तेव्हां भागाकार २ आला तर ती संख्या कोणती हें सांगे :

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

या उदाहरणांत असेरीस दृश्य संख्या २ ही आहे. हिला सूत्रांत सांगितल्यावरून बलट किया करूं. १० भाजक आहे म्हणून $१ \times १० = १०$ झाले. ८ अधिक आहेत म्हणून $२० - ८ = १२$ यांचा वर्ग $१२ \times १२ = १४४$ यांत ५२ मिळवून १९२ बाचे वर्गमूळ १४ यांत $१४ \times \frac{१}{२} = ७$ म्हणजे ७ मिळवून २१ यास ७ नीं गुणून १४७ यांतून $१४७ \times \frac{३}{४} = १०९.८७५$ म्हणजे १०९ वजा करून ८४ यास ३ नें भागून २८ हें उत्तर.

इष्टकर्मप्रकरणम्.

सूत्रम्—उद्देशकालापवदिष्टराशिः क्षुण्णो हर्तोऽस्य
रहितो युतो वा ॥ इष्टाहतं दृष्टमनेन भक्तं राशिर्भवेत्प्रो-
क्तमितिष्टकर्म ॥

अर्थ—प्रथम इष्टसंख्या कल्पना करून त्या इष्टसंख्येस उदाहरणांत सांगितल्याप्रमाणें किया करावी म्हणजे गुणावयास सांगितलें असल्यास गुणावें. भागावयास सांगितलें असल्यास भागावें. मिळवावयास किंवा वजा करावयास सांगितल्यास तसें करावें. याप्रमाणें किया करून जें फल येईल त्यानें, दृश्यसं-

ख्येस इष्टसंख्येने गुणून आलेल्या गुणाकारास भागावें. म्हणजे जो भागाकार येईल ती मूळ संख्या येईल.

उदाहरणम्—पंचघ्नः स्वत्रिभागोनो दशभक्तः समन्वितः ॥
राशिर्न्यशाध्वरादैः स्यात्को राशिर्न्यूनसप्ततिः ॥

अर्थ—ज्या संख्येस ५ नीं गुणून त्याचा $\frac{1}{5}$ वजा करून बाकीस १० नीं भागून त्यात मूळ संख्येचा $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$ व $\frac{1}{5}$ हे मिळविले असतां ६८ होतात तर ती संख्या कोणती ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

इष्टसंख्या ३ घटून तिला ५ नीं गुणून १५ यांतून $१५ \times \frac{1}{5}$ वजा करून १० या बाकीस १० नीं भागून भागाकार १ सात, इष्टसंख्या ३ हिचा $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$ व $\frac{1}{5}$ मिळवून $\frac{3}{5}$ आले, त्यानें इष्टसंख्या ३ व दृश्यसंख्या ६८ यांच्या गुणाकारा २०४ स भागिलें तेव्हां ४८ ही मूळसंख्या झाली हें उत्तर.

उदाहरणम्—यूथार्धं सत्रिभागं वनविवरगतं कुंजरा-
णां च दृष्टं षड्भागश्चैव नद्यां पिवति च सलिलं सप्तमांशे-
न मिश्रः ॥ पबिन्यां चाष्टमांशः स्वनवमसहितः क्रीडते
सानुरागो नागेंद्रो हस्तिनीभिस्तिमृधिरनुगतः का भवेद्यु-
थसंख्या ॥

अर्थ—एका ठिकाणीं हस्तिमुद्राय होता. त्यापैकी अर्ध व अर्धाचे $\frac{1}{2}$ इतके हस्ति आण्यांतोळ गुहेत गेले; $\frac{1}{2}$ व $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ इतके हस्ति नदींत पाप्पि प्यावयाकरितां गेले; व $\frac{1}{2}$ आणि $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ इतके हस्ति पबिनीचे ठाई क्रीडा करीत होते. आणि एक हस्ति ९ हस्तींनीं बरोबर क्रीडा करीत जात आहे, तर त्या समुद्रायांत हस्ति किती होते ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

इष्टसंख्या १ धरून

$$1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

∴ दृश्यसंख्या ४ × इष्टसंख्या १ ÷ $-\frac{1}{2}$ = १००८ हस्ति हैं उत्तर.

उदाहरणम्—अमलकमलराशेरूपं शयं चांशषष्ठैस्त्रिनयन-
हरिसूर्या येन तुर्येण चार्या ॥ गुरुपदमथ षड्भिः पूजितं
शेषपद्मैः सकलकमलसंख्यां क्षिप्रमाख्याहि तस्य ॥

अर्थ—एका ठिकाणीं कमलसमूह होता. त्यापैकी $\frac{1}{2}$ शिवास वाहिनी, $\frac{1}{2}$ कमलें विष्णूस वाहिनी, $\frac{1}{2}$ सूर्यास वाहिनी, $\frac{1}{2}$ सरस्वतीस वाहिनी. नंतर बाकी $\frac{1}{2}$ कमलें शिल्पक राहिलेलीं गुरुचरणीं अर्पण केलीं तर त्या समूहामध्ये कमलें किती होतीं हैं सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथे इष्ट संख्या १ धरून

$$1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 1 - \frac{2}{1} = -\frac{1}{1}$$

∴ दृश्यसंख्या ६ × इष्टसंख्या १ ÷ $-\frac{1}{1}$ = १२० कमलें हैं उत्तर.

उदाहरणम्—हारस्तारस्तरुण्या निधुवनकलहे मौक्तिकानां विशीर्णो भूमौ यातस्त्रिभागः शयनतलगतः पंच-
भांशोऽस्य दृष्टः ॥ प्राप्तः षष्ठः सुकेच्या गणकदशमकः संयु-
हीतः प्रियेण दृष्टं षट् च सूत्रे कथय कतिपयैर्मौक्तिकै-
रेष हारः ॥

अर्थ—मुरत युद्धामध्ये तरुणीच्या गळ्यांतील मौक्तिकाचा हार तुटला, त्यांतील $\frac{1}{2}$ मोती भूमीवर पडले, $\frac{1}{2}$ मोती शय्येवर पडले, $\frac{1}{2}$ मोती तरुणीनें गोळा केले, $\frac{1}{2}$ मोती पतीनें गोळा

केले, बाकी १ मोती हाराच्या सूत्रांतच राहिले, तर त्या हारामध्ये मोती किती होते ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

इष्टसंख्या १ धरून

$$१ - (\frac{१}{३} + \frac{१}{६} + \frac{१}{९} + \frac{१}{१०}) = \frac{१}{३०}$$

∴ दृश्यसंख्या ६ × इष्टसंख्या १ ÷ $\frac{१}{३०}$ = ३० मोतिकांचा हार हें उत्तर.

उदाहरणम्—स्वार्थं प्रादात्मयाने नवलवयुगुलं योऽव-
शेषाच्च काश्यां शेषांश्चि शुल्कहेतोः पथि दशमलवात्षट्च
शेषाद्भयायाम् ॥ शिष्टा निष्कात्रिषष्टिर्निजगृहमनया तीर्थ-
पांथः प्रयातस्तस्य द्रव्यप्रमाणं वद यदि भवता शेष-
जातिः श्रुताऽस्ति ॥

अर्थ—एका पांथस्याजवळ कांहीं द्रव्य होते. त्यापैकी त्याने निम्मे द्रव्य प्रयागांतील बाझणास दिलें, बाकी नें द्रव्य राहिलें त्याचे $\frac{२}{३}$ काशीमध्ये खर्च केलें, बाकीचें $\frac{१}{३}$ द्रव्य जका-
तीला दिलें, बाकीचे $\frac{१}{३०}$ द्रव्य गयेमध्ये खर्च केलें. शेवटी
त्याजवळ ६३ रुपये शिल्लक राहिले तर त्याचे जवळ किती
द्रव्य होते हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

इष्टसंख्या १ धरून $१ - \frac{१}{३} = \frac{२}{३}$ ही प्रयागांतील शिल्लक.

∴ $\frac{२}{३} \times \frac{३}{२} = \frac{१}{१}$ काशींत खर्च केले तेव्हां $\frac{२}{३} - \frac{१}{३} = \frac{१}{३}$ शिल्लक.

∴ $\frac{१}{३} \times \frac{३}{१} = \frac{१}{१}$ जकातीस दिले. $\frac{१}{३} - \frac{१}{३} = \frac{०}{३}$ शिल्लक राहिली.

∴ $\frac{०}{३} \times \frac{३}{०} = \frac{०}{०}$ गयेत खर्च झाला. तेव्हां $\frac{०}{३} - \frac{०}{३} = \frac{०}{३}$
 $\frac{३५}{३०} - \frac{३५}{३०} = \frac{०}{३०}$ ही असेची शिल्लक झाली.

∴ दृश्यसंख्या ६३ × इष्ट संख्या १ ÷ $\frac{०}{३०} = ५२०$ रुपये हें उत्तर.

उदाहरणम्—पंचांशोऽलिकुलात्कदंबगमयंशः शि-
लीधं तयोर्विश्लेषस्त्रिगुणो मृगासि कुटजं दोलायमानोऽ
परः ॥ कांते केतकमालतीपरिमलप्राप्तैककालमियादूतादूत
इतस्ततो भ्रमति स्वे भृंगोऽलिसंख्यां वद ॥

अर्थ—एक भ्रमरसमूह होता. त्यांतील $\frac{१}{३}$ भ्रमर कदंबाचे
झाडावर गेले, $\frac{१}{३}$ भ्रमर शिलीध्रवृक्षावर गेले, आणि $(\frac{१}{३} - \frac{१}{३})$
 $\times ३$ भ्रमर कुज्याच्या झाडावर गेले. व १ भ्रमर तेथे होता
तर त्या समूहांत भ्रमर किती होते हें सांग ॥

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

इष्टसंख्या १ धरून $१ - (\frac{१}{३} + \frac{१}{३} + (\frac{१}{३} - \frac{१}{३}) \times ३) = १ -$
 $\frac{१४}{१५} = \frac{१}{१५}$ \therefore दृश्यसंख्या १ \times इष्टसंख्या १ $\div \frac{१}{१५} = १५$ भ्रमर
हैं उत्तर.

विषमकर्म, अथवा संक्रमणप्रकरणम्.

मूत्रम्—योगोऽतरेणोनयुतोऽर्धितस्तौ राशी स्मृतं संक्र-
मणाख्यमेतत् ॥

अर्थ—दोन संख्यांची बेरीज व वजाबाकी दिली असतां
त्यांपासून त्या दोन संख्या काढणे झाल्यास, त्या दोन संख्यां-
च्या बेरजेत त्यांची वजाबाकी ऋण व धन करून त्यांचीं अर्धे
केलीं असतां प्रथक् त्या दोन्ही संख्या येतात. या गणितास
संक्रमण म्हणतात.

उपपत्ति.

अ = प्रथम संख्या

ब = द्वितीय संख्या धरून

(३२)

$$\left. \begin{array}{l} अ + व = प \\ अ - व = क \end{array} \right\} \text{ हीं दोन्ही दिलीं आहेत.}$$

या दोन समीकरणांची बेरीज करून

$$२ अ = प + क$$

$$\therefore अ = \frac{प + क}{२}$$

त्याच दोन समीकरणांच्या वजाबाकीवरून

$$२ व = प - क$$

$$\therefore व = \frac{प - क}{२}$$

\therefore इष्ट सिद्धि झाली.

उदाहरणम्—ययोर्योगः शतंसैकं वियोगः पंचविंश-
तिः ॥ तौ राशी वद मे वत्स वेत्स संक्रमणं यदि ॥

अर्थ—ज्यांची बेरीज १०१ व वजाबाकी २५ आहे त्या
दोन संख्या कोणत्या हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$१०१ - २५ = ७६ याचें अर्ध ३८$$

$$१०१ + २५ = १२६ याचें अर्ध ६३$$

$$\therefore ३८ व ६३ ह्या संख्या हें उत्तर.$$

सूत्रम्—वर्गांतरं राशिवियोगभक्तं योग स्ततः प्रोक्त-
वदेव राशी ॥

अर्थ—दोन संख्यांचें अंतर व त्याच दोन संख्यांच्या
वर्गांचें अंतर दिलें असतां, त्यांपासून त्या दोन संख्या काढणें

ज्ञाह्यास, त्या दोन संख्यांच्या अंतरानें वर्गांतरास भागावें म्हणजे त्या दोन संख्यांची बेरीज येते. नंतर अंतर व बेरीज यांवरून मागच्या संक्रमण सूत्रानें त्या दोन संख्या काढतां येतील. या गणितास वर्गसंक्रमण असें म्हणतात.

उपपत्ति.

अ = एक संख्या आणि

ब = दुसरी संख्या धरून

$$अ^2 - ब^2 = (अ + ब) (अ - ब)$$

$$\therefore अ + ब = \frac{अ^2 - ब^2}{अ - ब}$$

$$\therefore योग = \frac{वर्गांतर}{राश्यांतर}$$

\therefore इष्टसूत्रासिद्धि झाली.

उदाहरणम्—राश्यांतरास वर्गांतरास भागावें तत्कृत्योश्च चतुः-
शती ॥ विवरं वद तौ राशी शीघ्रं गणितकोविद ॥

अर्थ—ज्या दोन संख्यांचें अंतर ८ आहे व त्यांच्या वर्गांचें अंतर ४०० आहे. तर त्या दोन संख्या कोणत्या ?

उत्तरानिष्काशनक्रिया.

वर्गांतर ४०० यास ८ ने भागून ५० ही त्या दोन संख्यांची बेरीज झाली म्हणून

$$\left. \begin{array}{l} \frac{५० - ८}{२} = २१ \\ \frac{५० + ८}{२} = २९ \end{array} \right\} \text{ ह्या दोन संख्या हें उत्तर. }$$

याप्रमाणें संक्रमणप्रकरणाचें भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

वर्गकर्मप्रकरणम्.

सूत्रम्—इष्टकृति रष्टगुणिता व्येका दलिता विभाजिते-
ष्टेन ॥ एकः स्यादस्य कृतिर्दलिता सैका परो राशिः॥ रूपं-
द्विगुणेष्टहृतं सेष्टं प्रथमोऽथवापरो रूपम् ॥ कृतियुतिविद्युती
व्येके वर्गौ स्यातां ययो राश्योः ॥

अर्थ—ज्या दोन संख्यांच्या वर्गांची बेरीज व वजाबाकी
या प्रत्येकीतून १ वजा केला असतां ज्या बाक्या राहतात त्या
वर्गराशि होतात अशा दोन संख्या काढण्याची रीति पहिली—
प्रथम इष्टसंख्या कल्पून तिच्या वर्गास ८ नीं गुणून १ वजा
करावा, नंतर जी बाकी राहिल तिच्या अर्थास इष्टसंख्येनें भागवें
म्हणजे पहिली संख्या येते. आणि या पहिल्या संख्येच्या
वर्गाचे अर्धात १ मिळविला असतां दुसरी संख्या येते.

दुसरी रीति—इष्टसंख्येच्या दुप्पटीनें १ या संख्येस
भागून त्यांत इष्टसंख्या मिळविली असतां पहिली संख्या होते.
व दुसरी संख्या १ हीच समजावी.

उदाहरणम्—राश्योर्ययोः कृतिवियोगयुती निरेके मूल-
प्रदे प्रवद तौ मम मित्र यत्र ॥ छिद्रयंति बीजगणिते पट-
वोऽपि मूढाः षोढोक्तबीजगणितं परिभावयंतः ॥

अर्थ—ज्या दोन संख्यांच्या वर्गांची बेरीज व वजाबाकी
या प्रत्येकीतून १ वजा केला असतां ज्या बाक्या राहतात त्या
वर्गराशि असतात अशा दोन संख्या कोणत्या हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

इष्टसंख्या $\frac{3}{4}$ घेऊन याचा वर्ग $\frac{9}{16}$ यास ८ नीं गुणून २ यांतून १

वजा करून शेष १ याचे अर्ध $\frac{१}{२}$ यास इष्ट $\frac{१}{२}$ ने भागून १ हा प्रथमराशि झाला.

या प्रथमराशीचा वर्ग १ याचें अर्ध $\frac{१}{२}$ यांत १ मिळवून $\frac{३}{२}$ हा द्वितीयराशि झाला. \therefore १ व $\frac{३}{२}$ संख्या हें उत्तर.

आतां दुसऱ्या रीतीने सोडवूं. इष्ट १ याच्या दुपटीने १ स भागून $\frac{१}{२}$ यांत इष्ट १ मिळवून $\frac{३}{२}$ हा प्रथम राशि झाला. व द्वितीय राशि १ च समजावा. \therefore $\frac{३}{२}$ व १ संख्या हें उत्तर. या प्रमाणें इष्टवशेकरून अनेक उत्तरें येतील.

उपपत्ति.

क्ष = प्रथमराशि आणि $य + १$ = द्वितीयराशि धरून
प्रथमराशिवर्ग = $क्ष^२$ आणि द्वितीयराशिवर्ग = $य^२ + २य + १$
येथें $क्ष^२ = २य$ जर मानिलें तर वर्गांतरांतून १ वजा करून
वर्गराशी होतो असा एक आलाप सहज जुळतो करितां तसें मानून

$य = \frac{क्ष^२}{२}$ ही किंमत द्वितीयराशींत ठेवून.

क्ष = प्रथमराशि आणि $\frac{क्ष^२}{२} + १$ = द्वितीयराशि.

आतां दुसऱ्या आलापाप्रमाणें प्रथमराशि + द्वितीयराशि -
 $१ = क्ष^२ + \frac{क्ष^२}{२} + क्ष + १ - १ = \frac{क्ष^२}{२} + २$ क्ष हा वर्गराशि असला पाहिजे. व वर्गास वर्गांनें मागिलें असतां वर्गस्वहानि होत नसते म्हणून या वर्गराशीस क्ष ने भागून $\frac{क्ष^२}{२} + २$ हा ही वर्गराशि असला पाहिजे. व हें उदाहरण वर्गप्रकृतीचें झालें. म्हणून बीजांतील—“ इष्टमक्तो द्विधा क्षेपो इष्टोनाढ्यो दलीकृतः ॥ गुणयुल्लहतश्चाऽऽद्यो ह्रस्वज्येष्टे क्रमात्पदे ” या सूत्रानें इष्ट असें इष्टसंख्येचें मान करून कनिष्ठमान म्हणजे

क्ष ची किंमत $\frac{२ इष्ट - १}{२}$ ही आली. व $\frac{क्ष^२}{२} + १$ अशी द्वितीय

वर्गकर्मप्रकरणम्.

सूत्रम्—इष्टकृति रष्टगुणिता व्येका दलिता विभाजिते-
ष्टेन ॥ एकः स्यादस्य कृतिर्दलिता सैका परो राशिः ॥ रूपं-
द्विगुणेष्टृतं सेष्टं प्रथमोऽथवापरो रूपम् ॥ कृतियुतिवियुती
व्येके वर्गौ स्यातां ययो राश्योः ॥

अर्थ—ज्या दोन संख्यांच्या वर्गाची बेरीज व वजाबाकी
या प्रत्येकीतून १ वजा केला असता ज्या बाक्या राहतात त्या
वर्गराशी होतात अशा दोन संख्या काढण्याची रीति पहिली—
प्रथम इष्टसंख्या कल्पून तिच्या वर्गास ८ नीं गुणून १ वजा
करावा, नंतर जी बाकी राहिल तिच्या अर्थास इष्टसंख्येने भागावे
म्हणजे पहिली संख्या येते. आणि या पहिल्या संख्येच्या
वर्गाचे अर्धात १ मिळविला असता दुसरी संख्या येते.

दुसरी रीति—इष्टसंख्येच्या दुप्पटीने १ या संख्येस
मागून त्यांत इष्टसंख्या मिळविली असता पहिली संख्या होते.
व दुसरी संख्या १ हीच समजावी.

उदाहरणम्—राश्योर्ययोः कृतिवियोगयुती निरेके मूल-
प्रदे प्रवद् तौ मम मित्र यत्र ॥ छिश्यंति बीजगणिते पद-
चोऽपि सूदाः षोडोक्तबीजगणितं परिभावयंतः ॥

अर्थ—ज्या दोन संख्यांच्या वर्गाची बेरीज व वजाबाकी
या प्रत्येकीतून १ वजा केला असता ज्या बाक्या राहतात त्या
वर्गराशि असतात अशा दोन संख्या कोणत्या हें सांग १

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

इष्टसंख्या ३ घटून याचा वर्ग ३ यास ८ नीं गुणून २ यांतून १

बजा करून शेष १ याचे अर्ध $\frac{३}{२}$ यास इष्ट $\frac{३}{२}$ ने भागून १ हा प्रथमराशि साला.

या प्रथमराशीचा वर्ग १ याचे अर्ध $\frac{३}{२}$ यांत १ मिळवून $\frac{३}{२}$ हा द्वितीयराशि साला. \therefore १ व $\frac{३}{२}$ संख्या हें उतर.

आतां दुसऱ्या रीतीनें सोडवूं. इष्ट १ याच्या दुपटीनें १ स भागून $\frac{३}{२}$ यांत इष्ट १ मिळवून $\frac{३}{२}$ हा प्रथम राशि साला. व द्वितीय राशि १ च समजावा. \therefore $\frac{३}{२}$ व १ संख्या हें उतर. या प्रमाणें इष्टवशेकरून अनंत उत्तरें येतील.

उपपत्ति.

क्ष = प्रथमराशि आणि य + १ = द्वितीयराशि धरून प्रथमराशिर्वर्ग = क्ष^२ आणि द्वितीयराशिर्वर्ग = य^२ + २ य + १ येथें क्ष^२ = २ य जर मानिलें तर वर्गांतरांतून १ वजा करून वर्गराशीं होतो असा एक आलाप सहज जुळतो करितां तसें मानून

य = $\frac{क्ष^२}{२}$ ही किंमत द्वितीयराशींत ठेवून.

क्ष = प्रथमराशि आणि $\frac{क्ष^२}{२} + १$ = द्वितीयराशि.

आतां दुसऱ्या आलापाप्रमाणें प्रथमराशि^२ + द्वितीयराशि^२ - १ = क्ष^२ + $\frac{क्ष^२}{२}$ + $\frac{क्ष^२}{२}$ + १ - १ = $\frac{क्ष^२}{२}$ + २ क्ष हा वर्गराशि असला पाहिजे. व वर्गास वर्गानें भागिलें असतां वर्गस्व हानि होत नसते म्हणून या वर्गराशीस क्ष ने भागून $\frac{क्ष^२}{२} + २$ हा ही वर्गराशि असला पाहिजे. व हें उदाहरण वर्गप्रकृतीचें झालें. म्हणून नीजांतील—“ इष्टभक्तो द्विधा क्षेपो इष्टोनाढ्यो दलीकृतः ॥ गुणमूलहतश्चाऽऽद्यो हस्वज्येष्टे क्रमात्पदे ” या सूत्रानें इष्ट असें इष्टसंख्येचें मान करून कनिष्ठमान म्हणजे

क्ष ची किंमत $\frac{२३ - १}{२}$ इष्ट ही आली. व $\frac{क्ष^२}{२} + १$ अशी द्वितीय

राशीची किंमत आहे म्हणून सूत्रांत दिलेल्या पहिल्या रीतीची उपपत्ति झाली.

आतां दुसऱ्या रीतीची उपपत्ति स्पष्ट करून देऊं—

क्ष = प्रथमराशि आणि १ = द्वितीयराशि धरून.

यांच्या वर्गयोगांतून १ वजा केला असतां वर्गराशी होतं असा एक आलाप सहज जुळला म्हणून क्ष - १ - १ = क्ष. २ हाही वर्गराशि असला पाहिजे. म्हणून - २ इष्ट असा इष्ट संख्येची कल्पना करून 'इष्ट भक्ती द्विधा' इत्यादि सूत्रात कानिष्ठमान म्हणजे क्ष ची किंमत - इष्ट + इष्ट अशी आतां म्हणून दुसऱ्या रीतीची सिद्धि झाली.

सूत्रम्—इष्टस्य वर्गवर्गो घनश्च तावष्टसंगुणौ प्रथमः
सैको राशी स्याता मेवं व्यक्तेऽथवाऽव्यक्ते ॥

अर्थ—या सूत्रांत मागील उदाहरण सोडविण्यास निरावरीती सांगितली आहे ती समीकरणरूपां देऊं.

८ इष्ट + १ = प्रथमराशि. ८ इष्ट = द्वितीयराशि.

उपपत्ति.

या + १ = प्रथमराशि आणि का = द्वितीयराशि धरून उदाहरणांत सांगितल्या प्रमाणें.

$$(या + १)^२ + का - १ = या + २ या + का$$

$$(या + १)^२ - का - १ = या + २ या - का$$

येथें २ या = नी^२ आणि २ यानी = का अशा किंमती धरल्या असतां या + नी^२ + २ यानी आणि या + नी^२ - २ यानी असे दोन्ही वर्गराशि होतात.

(३७)

$$\therefore या = \frac{नी^३}{२}$$

$$को = नी^३$$

येथे नी = ४ इष्टे अशी किमत धरून

$$या = \frac{१६ इष्टे}{२} = ८ इष्टे$$

$$को = ६४ (इष्टे)^३$$

$$\therefore का = ८ इष्टे$$

$$\therefore प्रथमराशि = ८ इष्टे + १$$

$$द्वितीयराशि = ८ इष्टे$$

$$\therefore इष्टसूत्र सिद्धि झाली.$$

श्लोकः—पाटीसूत्रोपमं बीजं गूढमित्यवभासते ॥ नास्ति
गूढममूढानां नैव वेदित्यनेकधा ॥

अर्थ—अंकगणिताप्रमाणे बीजही मूढांना गूढ वाटते. परंतु
प्राज्ञांना ते गूढ नसून अनेक प्रकारचे आहे.

गुणकर्मप्रकरणम्.

सूत्रम्—गुणघ्नमूलोनयुतस्य राशेर्दृष्टस्य युक्तस्य गुणार्ध-
कृत्या ॥ मूलं गुणार्धेन युतं विहीनं वर्गीकृतं प्रष्टुरभीष्ट-
राशिः ॥ यदा लवैश्चोनयुतः स राशिरेकेन भागोनयुतेन
भक्त्या ॥ दृश्यं तदा मूलगुणं च बाभ्यां साभ्यस्ततः
शोक्तवदेव राशिः ॥

अर्थ—ज्या वेळेस एखाद्या गुणकाने गुणित अशा स्वीकृत

वर्गमूलने उणा किंवा युक्त राशी असतो. त्या वेळीं मूलगुण-
काच्या (वर्गमूलाच्या गुणकाच्या) अर्धाचा वर्ग दृश्य संख्ये-
मध्ये मिळवावा. आलेल्या बेरजेचे वर्गमूळ काढून त्यांत मूल-
गुणकाचे अर्ध मिळवावे किंवा वजा करावे, नंतर त्याचा वर्ग
केला असता उत्तर येते.

ज्या वेळेस राशि स्वभागाने उणा किंवा अधिक असेल त्या-
वेळीं स्वभागाने उणा किंवा अधिक असा १ करून त्याने दृश्य
व मूलगुणक या दोघांस भागून जे पृथक् भागाकार येतील ते
दृश्य व मूलगुणक करून पूर्वोक्त क्रिया केली असता उत्तर येते.

या सूत्राची उपपत्ति लक्ष्यांत येण्याकरितां पुढील उदाहरण
बीजक्रियेने सोडवून दाखवितो.

उदाहरणम्—बाले मरालकुलमूलदलानि सप्त तीरे
विलासभरमंथरगाण्यपश्यम् ॥ कुर्वच केलिकलहं कलहंस-
गुग्मं शेषं जले वद मरालकुलप्रमाणम् ॥

अर्थ—एके ठिकाणीं हंस पक्ष्यांचा समुदाय होता. त्यांतून
त्याचे वर्गमूलाच्या अर्धाची ७ पट इतके हंस तीरावर गेले व
बाकी २ हंस तेथे राहिले होते तर त्या समूहांत हंसपक्षी किती
होते हे सांग !

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

मूलगुणक $\frac{७}{१६}$ याच्या अर्धाचा वर्ग $\frac{४९}{२५६}$ हा दृश्य २ मध्ये मिळवून $\frac{५३}{२५६}$
याचे वर्गमूळ $\frac{१}{१६}$ यांत मूलगुणकाचे अर्ध $\frac{७}{३२}$ मिळवून ४ याचा वर्ग १६
इतके हंसपक्षी होते हे उत्तर.

आतां हेच उदाहरण सूत्राची उपपत्ति समजण्याकरितां बीजक्रियेने सोडवूं.

स = हंसपक्षी धरून

स - $\frac{७}{१६} \sqrt{\text{स}} = २$

उभयपक्षांत $\frac{७}{२ \times २}$ चा वर्ग मिळवून

$$\text{क्ष} - \frac{9}{4} \sqrt{\text{क्ष}} + \left(\frac{9}{4}\right)^2 = 2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2$$

उभयपक्षांची वर्गमूले काढून

$$\sqrt{\text{क्ष}} - \frac{9}{4} = \sqrt{2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2}$$

$$\sqrt{\text{क्ष}} = \sqrt{2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2} + \frac{9}{4}$$

$$\therefore \text{क्ष} = \left(\sqrt{2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2} + \frac{9}{4}\right)^2$$

\therefore इष्टसूत्रसिद्धि झाली.

उदाहरणम्—स्वपदैर्नवभिर्युक्तः स्याच्चत्वारिंशताऽधिकम् ॥ शतद्वादशकं विद्वन्कः स राशिर्निगद्यताम् ॥

अर्थ—ज्या राशीमध्ये तिच्या वर्गमूळाची ९ पट मिळविळी असतां १२४० होतात तर तो राशि कोणता हें सांग !

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथें मूलगुणक ९ याचें अर्ध $\frac{9}{2}$ याचा वर्ग $\frac{81}{4}$ यांत दृश्यसंख्या १२४० मिळवून $\frac{5081}{4}$ याचें वर्गमूळ $\frac{71}{2}$ यांतून मूलगुणकार्ध $\frac{9}{2}$ वजा करून ३१ याचा वर्ग ९६१ इष्टसंख्या झाली हें उत्तर.

उदाहरणम्—यातं हंसकुलस्य मूलदशकं मेघागमे मानसं प्रोढ्वीय स्थलपद्मिनीवनमगादष्टांशकोऽभस्तटात् ॥ बाले बालमृणालशालिनि जले केलिक्रियालालसं दृष्टं हंसयुगत्रयं च सकलां यूथस्य संख्यां वद ॥

अर्थ—एका ठिकाणीं हंस पक्षांचा समूह होता. त्यांतून त्याच्या वर्गमूळाच्या दसपट हंस मानस सरोवरास गेले. तसेच त्या समूहाच्या ८ व्या हिशशाइतके हंस कमलवनास गेले. व बाकी ६ हंस तेथें शिळक राहिले तर त्या समूहांत हंसपक्षी किती होते हें सांग !

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथें भाग $\frac{1}{2}$ आहे हा १ तून वजा करून बाकी $\frac{1}{2}$ यातें मूलगुणक १० व दृश्यसंख्या ६ या उभयतांस भागून भागाकार $\frac{10}{2}$ व $\frac{6}{2}$



आले. आतां मूलगुणक ८ व दृश्य ८ कल्पून सांगितलेली क्रिया करूं.
८ याचें अर्ध ४ याचा वर्ग १६ यांत दृश्य ८ मिळवून
१६ याचें मूळ ४ यांत मूलगुणकार्ध ४ मिळवून १२ याचा वर्ग
१४४ इष्टसंख्या झाली हें उचार.

उदाहरणम्—पार्थः कर्णवधाय मार्गणगणं क्रुद्धो रणे
संदधे तस्यार्धेन निवार्य तच्छरगणं मूलैश्चतुर्भिर्हयान् ॥
शर्यं षड्भिरथेषुभिस्त्रिभिरपि च्छत्रं ध्वजं कार्मुकं चिच्छे-
दास्य शिरः शरेण कति ते यानर्जुनः संदधे ॥

अर्थ—युद्धांत कर्णाचा वध होण्याकरितां अर्जुनानें जे बाण
सोडिले. त्यांतील निम्म्या बाणांनीं शत्रूच्या बाणांचें निवारण
केलें. व मूळाच्या चौपट बाणांनीं घोडे मारिले. नंतर ६ बाणांनीं
शल्यास मारून ३ बाणांनीं छत्र, ध्वज व कार्मुक यांचें छेदन
करून शेवटीं १ बाणानें त्याचा शिरच्छेद केल्या तर अर्जुनानें
किती बाण सोडिले हें सांग !

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथें भाग ३ हा १ तून वजा करून बाकी ३ हिनें मूलगुणक ४ व
दृश्यसंख्या १० यांस क्रमानें भागून ८ व २० भागाकार आले. आतां
मूलगुणक ८ व दृश्य २० मानून उक्त क्रिया करूं. मूलगुणक ८ याचे
अर्धाचा वर्ग १६ यांत दृश्य मिळवून ३६ याचें मूळ ६ यांत मूलगुणार्ध
४ मिळवून १० याचा वर्ग १०० इष्टसंख्या झाली हें उत्तर.

उदाहरणम्—अलिकुलदलमूलं मालतीं यातमष्टौ नि-
खिलनवमभागाश्चालिनीभृंगमेकम् ॥ निशि परिमल्लुब्धं
पद्ममध्ये निरुद्धं प्रतिरणति रणंतं ब्रूहि कान्तेऽलिसंख्याम् ॥

अर्थ—एका ठिकाणीं भ्रमर समूह होता. त्याच्या अर्धाचें
वर्गमूळाइतके भ्रमर व समूहाचे ६ इतके भ्रमर मालती वृक्षावर
गेले व २ भ्रमर तेथें शिळक होते तर त्या समूहांत भ्रमर
किती होते हें सांग !

(४१)

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

क्ष = भ्रमर संख्या धरून

$$क्ष - \sqrt{क्ष} - \frac{क्ष}{२} = २$$

उभयपक्षांस २ नें भागून

$$\frac{क्ष}{२} - \frac{१}{२} \sqrt{क्ष} - \frac{१}{२} \cdot \frac{क्ष}{२} = १$$

येथें क्ष = क्ष धरून

$$क्ष - \frac{१}{२} \sqrt{क्ष} - \frac{१}{२} क्ष = १$$

येथें मूलगुणक $\frac{१}{२}$, भाग $\frac{१}{२}$ व दृश्य १ याप्रमाणे आहे म्हणून $\frac{१}{२}$ भाग १ तून वजा करून $\frac{१}{२}$ या बाकीने मूलगुणक $\frac{१}{२}$ व दृश्य १ यांस क्रमानें भागून भागाकार $\frac{१}{२}$ व १ असे आले तेव्हां मूलगुणक $\frac{१}{२}$ व दृश्य १ कल्पून पूर्वोक्त क्रिया करूं.

$\frac{१}{२}$ चे अर्धाचा वर्ग $\frac{१}{४}$ यांत दृश्य १ मिळवून $\frac{३२५}{४}$ याचें मूळ $\frac{१५}{४}$ यांत मूलगुणार्ध $\frac{१}{२}$ मिळवून ६ याचा वर्ग ३६ ही किंमत क्ष ची आली म्हणून $३६ \times २ = क्ष$ ची किंमत झाली $\therefore ७२$ भ्रमर होते हें उत्तर.

उदाहरणम्—यो राशिरष्टादशभिः स्वमूलैराशित्रि-
भागेण समन्वितश्च ॥ जातं शतद्वादशकं तमाशु जानीहि
पाद्यां पदुताऽस्ति ते चेत् ॥

अर्थ—ज्या संख्येंत तिच्या वर्गमूळाची १८ पट आणि त्याच संख्येचा $\frac{१}{२}$ मिळविळा असतां १२०० होतात तर ती संख्या कोणती ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$\frac{१}{२}$ भाग १ त मिळवून $\frac{१}{२}$ यांने मूलगुणक १८ व दृश्य १२०० यांस भागून क्रमानें भागाकार $\frac{३७}{२}$ व १०० आले. आतां मूलगुण $\frac{३७}{२}$ व दृश्य १०० धरून उत्तरक्रिया करूं. $\frac{३७}{२}$ चे अर्धाचा वर्ग $\frac{७२१}{४}$ यांत १०० मिळवून त्याचें वर्गमूळ $\frac{१३३}{२}$ यांतून मूलगुणार्ध $\frac{३७}{२}$ वजा करून बाकी २४ हिचा वर्ग ५७६ इतक्या झाली हें उत्तर.

इति गुणकर्मसमाप्तम्.

अथ त्रैराशिकप्रकरणम्.

सूत्रम्—प्रमाणमिच्छा च समानजाती आद्यंतयोस्त-
त्फलमन्यजाति ॥ मध्ये तदिच्छाहतमाद्यहत्स्यादिच्छाफलं
व्यस्तविधिर्विलोमे ॥

अर्थ—त्रैराशिकांतील आद्यराशीस प्रमाण, मध्यराशीस
फल, आणि अंत्यराशीस इच्छा असें म्हणतात. आणि या
तिन्हीपासून जें उत्तर काढावयाचें त्यास इच्छाफल असें म्हणतात.

त्रैराशिकामध्ये प्रमाण व इच्छा हे राशि समानजातीचे
असले पाहिजेत व फल हें निराळ्या जातीचें पाहिजे.

जेव्हां समत्रैराशिक असतें त्या वेळीं इच्छांकांनें फलास
गुणून प्रमाणांकांनें भागिलें असतां इच्छाफल येतें.

ज्या वेळीं व्यस्त त्रैराशिक असतें त्या वेळीं फलांकास
प्रमाणांकांनें गुणून इच्छांकांनें भागवें म्हणजे इच्छाफल येतें.

सूत्रम्—इच्छावृद्धौ फले वृद्धिर्हासे हासश्च जायते ॥
समत्रैराशिकं तत्र ज्ञेयं गणितकोविदैः ॥

अर्थ—ज्या वेळेस प्रमाणांकापेक्षां इच्छांक जास्त असून
फलांकापेक्षां इच्छाफल जास्त येत असेल त्या वेळीं समत्रैरा-
शिक म्हणावें. किंवा प्रमाणांकापेक्षां इच्छांक कमी असून
फलांकापेक्षां इच्छाफल कमी येत असल्यास समत्रैराशिक
असें म्हणतात.

उदाहरणम्—कुंकुमस्य सदलं पलद्वयं निष्कसप्तमलवै-
स्त्रिभिर्यदि ॥ प्राप्यते सपदि मे वणिग्वर ब्रूहि निष्कनवकेन
तत्कियत् ॥

(४३)

अर्थ—जर ३ निष्कास २३ पलें कुंकु येतें तर ९ निष्कास किती कुंकु येईल ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

प्रमाणांक	फलांक	इच्छांक
निष्क	पलें	निष्क
३ :	२३ ::	९

हे समत्रैराशिक आहे.

$$\therefore \frac{३}{१} \times \frac{१}{१} \times \frac{९}{१} = \frac{२७}{१} = २७ \text{ पलें इच्छाफल, हे उत्तर.}$$

उदाहरणम्—प्रकृष्टकर्पूरपलत्रिषष्ट्या चेल्लभ्यते निष्क-चतुष्कयुक्तम् ॥ शतं तदा द्वादशभिः सपादैः पलैः किमा-चक्ष्व सखे विचिंत्य ॥

अर्थ—जर ३६ पलें कापरास १०४ निष्क पडतात, तर १२३ पलें कापरास काय पडेल हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

पलें	निष्क	पलें
३६ :	१०४ ::	१२३

हे त्रैराशिक सम आहे म्हणून $\frac{३६}{१} \times \frac{१०४}{१} \times \frac{१}{१} = \frac{३७२४}{१}$ निष्क हे उत्तर.

उदाहरणम्—द्रुमद्वयेन साष्टांशा शालितंडुलखारिका ॥ लभ्या चेत्यणसप्तत्या तत्किं सपदि कथ्यताम् ॥

अर्थ—जर २ द्रुमास १३ खारिका तांदूळ मिळतात तर ७० पैशास किती तांदूळ मिळतील हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

पैसे	खारिका	पैसे
३२ :	१३ ::	७०

हे समत्रैराशिक आहे म्हणून—

$$\frac{३२}{१} \times \frac{१३}{१} \times \frac{७०}{१} = \frac{२९१२}{१} = २९१२ \text{ खारिका हे उत्तर.}$$

सूत्रम्—इच्छावृद्धौ फले हासो हासे वृद्धिश्च जायते ॥
व्यस्तं त्रैराशिकं तत्र ज्ञेयं गणितकोविदैः ॥

अर्थ—प्रमाणांकापेक्षां इच्छांक जास्त असून फलांकापेक्षां इच्छाफल कमी येत असेल तर व्यस्तत्रैराशिक समजावें, किंवा प्रमाणांकापेक्षां इच्छांक कमी असून फलांकापेक्षां इच्छाफल नास्त येत असेल तर व्यस्तत्रैराशिक समजावें ?

सूत्रम्—जीवानां वयसो मौल्ये तौल्ये वर्णस्य हेमनि ॥
भागहारे च राशीनां व्यस्तं त्रैराशिकं विदुः ॥

अर्थ—ज्या उदाहरणांत प्राण्यांच्या वयाच्या मौल्याचा संबंध असेल तेथे व्यस्तत्रैराशिक समजावें, विवक्षित कसाच्या सोन्याचे वजनाचा संबंध असल्यास व्यस्तत्रैराशिक समजावें, किंवा विवक्षित मापानें धान्यादिराशि मोजण्याचा संबंध असल्यास व्यस्तत्रैराशिक समजावें.

उदाहरणम्—प्राप्नोति चैत्षोडशवत्सरा स्त्री द्वार्त्रि-
शतं विंशतिवत्सरा किम् ॥ द्विधूर्वहो निष्कचतुष्कमुक्षा
प्राप्नोति धूः षट्पवहस्तदा किम् ॥

अर्थ—जर १६ वर्षाची स्त्री ३२ निष्कांस मिळते तर २० वर्षाच्या स्त्रीस किती निष्क पडतील ?

जर २ धुरांचा बैल (ज्यास धूर वाहून लागून २ वर्षे झालीं असा) ४ निष्कास मिळतो तर ६ धुरांचा बैल किती किमतीस पडेल हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया,

वर्षे	:	निष्क	:	वर्ष
१६	:	३२	:	२०
व्यस्तत्रैराशिक आहे म्हणून,				
$\frac{१६ \times ३२}{२०} = \frac{१२८}{५} = २५ \frac{३}{५} \text{ हें उत्तर.}$				

(४९)

वर्षे २ : निष्क ४ :: वर्ष ६

व्यस्तत्रैराशिक आहे म्हणून

$$\frac{२ \times २}{६} = १\frac{१}{३} \text{ निष्क हे उत्तर.}$$

सदाहरणम्—दशवर्ण सुवर्ण चेद्रद्याणकमवाप्यते ॥
निष्केण तिथिवर्ण तु तदा वद कियन्मितम् ॥

अर्थ—जर एका निष्कास १० कशी सोने १ गद्याणक मिळते तर तितक्याच किमतीस १९ कशी सोने किती मिळेल हे सांग ॥

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

कस १० : ग. १ :: कस १५

व्यस्तत्रैराशिक आहे म्हणून,

$$\frac{१० \times १}{१५} = \frac{२}{३} \text{ गद्याणक हे उत्तर.}$$

सदाहरणम्—सप्तादकेन मानेन राशौ सस्यस्य मापिते ॥
यदि मानशतं जातं तदा पंचादकेन किम् ॥

अर्थ—जर एक धान्याची रास ७ आदका येवढ्या मापाने मोजली तर १०० मापे भरतात, तर तीच रास ९ आदका येवढ्या मापाने मोजली तर किती भरेल.

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

आ. ७ : मा. १०० :: आ. ९

हे व्यस्तत्रैराशिक आहे म्हणून,

$$\frac{१०० \times ७}{९} = १२० \text{ मापे हे उत्तर.}$$

अथ पंचराशिकादि प्रकरणम्.

सूत्रम्—पंचसप्तनवराशिकादिकेऽन्योन्यपक्षनयनं फल-
च्छिदाम् ॥ संविधाय बहुराशिजे वधे स्वल्परशिवधभा-
जिते फलम् ॥

अर्थ—पंचराशिक, सप्तराशिक इत्यादिकांमध्ये फलांक
इच्छांकपक्षांत न्यावा; व छेदांचा संभव असल्यास, ते ज्या
पक्षांत असतील त्याहून अन्य पक्षांत न्यावेत म्हणजे प्रमाणांक-
पक्षांत ते असल्यास इच्छांकपक्षांत, इच्छांकपक्षांत असल्यास
प्रमाणांकपक्षांत छेद न्यावेत. याप्रमाणें केलें असतां फलांक
ज्या पक्षांत नेला त्यांत पुष्कळ राशि होतात व दुसऱ्यांत कमी
होतील. नंतर पुष्कळ राशींचा गुणाकार करून त्यास अल्प-
राशींच्या गुणाकारानें भागिलें असतां इच्छा फल येतें.

उदाहरणम्—मासे शतस्य यदि पंचकलांतरं स्याद्वर्षे
गते भवति किं वद षोडशानाम् ॥ कालं तथा कथय मूल-
कलांतराभ्यां मूलं धनं मणककालफले विदित्वा ॥

अर्थ—एका महिन्यांत १०० रुपयांचें व्याज ५ रुपये
येतें तर १ वर्षांत १६ रुपयांचें व्याज काय येईल ? तसेंच
मुद्दल व व्याज यांपासून मुद्दत, व मुद्दत आणि व्याज यांपासून
मुद्दल सांग ?

उत्तरानिष्काशनक्रिया.

१ महिना	५ रुपये व्याज	१२ महिने	} सम
१०० रुपये		१६ रुपये	
$\frac{५ \times १२ \times १६}{१००} = ९\frac{३}{४} \text{ रु० व्याज हें उत्तर.}$			

(४७)

दुसरें उदाहरण.

१०० रु०	१ महिना	१६ रु०	} व्यस्त सम
५ व्याज		१६ रु० व्या.	

$$\frac{१०० \times ४० \times १}{१६ \times ५ \times ५} = १२ \text{ महिने हें उत्तर.}$$

तिसरें उदाहरण.

१ महिना	१०० मुदल	१२ म०	} व्यस्त सम
५ व्याज		४० व्याज	

$$\frac{१०० \times ४० \times १}{१२ \times ५ \times ५} = १६ \text{ मुदल हें उत्तर.}$$

उदाहरणम्—सत्र्यंशमासेन शतस्य चेत्स्यात्कलांतरं पंच संपंचमांशाः ॥ मासैस्त्रिभिः पंचलवाधिकैस्तत्सार्धाद्विषष्टेः फलमुच्यतां किम् ॥

अर्थ—जर १३ महिन्यांत १०० रुपयांचे ६३ रुपये व्याज होतें, तर ३ महिन्यांनीं ६२ रुपयांचे व्याज किति होईल ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

३ म०	३६ व्याज	१६ म०	} सम
१०० रु०		१३५ रु०	
$\frac{३६ \times १६ \times १२५ \times ३}{५ \times ५ \times २ \times ४ \times १००}$			= ७ हें उत्तर.

उदाहरणम्—विस्तारे त्रिकराः कराष्टकमिता दैर्घ्ये विचित्राश्च चेद्रूपैरुत्कटपट्टसूत्रपाटिका अष्टौ लभन्ते शतम् ॥ दैर्घ्ये सार्धकरत्रयाऽपरपटी हस्तार्धविस्तारिणी तादृक्किल-भते द्रुतं वद वणिग्वाणिज्यकं वेत्सि चेत् ॥

अर्थ—८ हात लांब व ३ हात रुंद अशी रेशमी ८ वस्त्रें १०० निष्कांस मिळतात; तर ३½ हात लांब ½ हात रुंद अशा एका रेशमी वस्त्रास काय पडेल ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

८ हा० लां०	१०० निष्क	३ हा० लां०	} सम
३ हा० रुं०		½ हा० रुं०	
८ वस्त्रें		१ वस्त्र.	

$$\frac{१०० \times ८ \times १ \times १}{८ \times २ \times २ \times ३ \times ८} = \frac{१७५}{१९२} \text{ निष्क हें उत्तर.}$$

उदाहरणम्—पिंडे येऽर्कमितांगुलाः किल चतुर्वर्गा-
गुला विस्तृतौ पट्टा दीर्घतया चतुर्दशकरास्त्रिशष्टभंते
शतम् ॥ एता विस्तृतिपिंडदैर्घ्यमितयो येषां चतुर्वर्जिताः
पट्टास्ते वद मे चतुर्दश सखे मूल्यं लभंते कियत् ॥

अर्थ—१४ हात लांब, १६ अंगुळे रुंद व १२ अंगुळे जाड अशा ३० फळ्या १०० निष्कांस मिळतात. तर ज्याची लांबी, रुंदी व जाडी प्रत्येकी पूर्वीच्या फळ्यापेक्षां ४ नीं कमी अशा १४ फळ्यांस काय पडेल ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

१४ हा० लां०	१०० निष्क	१० हा० लां०	} सम
१६ अं० रुं०		१२ अं० रुं०	
१२ अं० जा०		८ अं० जा०	
३० फळ्या		१४ फ०	

$$\therefore \frac{१०० \times १० \times १२ \times ८ \times १४}{१४ \times १६ \times १२ \times ३०} = १६ \frac{२}{३} \text{ निष्क हें उत्तर.}$$

उदाहरणम्—पट्टा ये प्रथमोदितप्रमितयो गव्यूतिमात्रे

(४९)

स्थितास्तेषामानयनाय चेच्छकटिनां द्रम्माष्टकं भाटकम् ॥
अन्ये ये तदनंतरं निगदिता माने चतुर्वज्रितास्तेषां का
भवतीति भाटकमितिर्गव्युतिषट्के वद ॥

अर्थ—मागच्या उदाहरणांत सांगितलेल्या मानाच्या ३०
फळ्या गव्युति अंतरावर आहेत. त्या आणावयास गाडीभाडे ८
द्रम्म पडते. तर पूर्वीच्याच उदाहरणांत सांगितलेल्या मानाच्या
ज्या १४ फळ्या त्या ६ गव्युति अंतरावरून आणावयास भाडे
काय पडेल ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

१४ हा० ला०	८ द्रम्म ..	१० हा० ला०	} सम
१६ अं० रु०		१२ अं० रु०	
१२ अं० जा०		८ अं० जा०	
३० फळ्या		१४ फळ्या	
१ गव्युति		६ गव्युति	

$$\frac{८ \times १० \times १२ \times ८ \times १४ \times ६}{१४ \times १६ \times १२ \times ३० \times १} = ८ \text{ द्रम्म हे उत्तर.}$$

भांडप्रतिभांडकक्रियासूत्रम्—तथैव भांडप्रतिभांडकेऽपि
विधिर्विपर्यस्य हरांश्च मूल्ये ॥

अर्थ—दोन भिन्नजातीच्या पदार्थांचा विनियम करावयाचा
असल्यास इच्छावस्तु मध्ये मांडून आद्यंतीं समान जाती मांडाव्या
नंतर त्यांतील मूल्यांचा विपर्यास (म्हणजे अन्योन्य पक्षांमध्ये
जेणें) करून, व छेद असल्यास त्यांचाही विपर्यास करून,
पंचराशिप्रमाणें कृति केली असतां उत्तर येते.

उदाहरणम्—द्रम्मेण लभ्यत इहाऽऽम्रशतत्रयं चेज्जि-

क्षत्पणेन विपणौ वरदाडिमानी ॥ आग्नेर्वदाऽऽशु दशभिः
कति दाडिमानी लभ्यानि तद्विनिमयेन भवन्ति मित्र ॥

अर्थ—जर बाजारांत १ द्रम्मास म्हणजे १६ पैशांस ३००
आंबे मिळतात; तसेंच १ पैशास ३० डाळिंबे मिळतात. तर
१० आंबे देऊन किती डाळिंबे मिळतील.

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

३०० आंबे . ३० डाळिंबे .. १० आंबे.

१६ पैसे . .. १ पैसा.

येथे मूल्यांचा विपर्यास करून

$$\frac{१६ \times ३० \times १०}{३०० \times १} = १६ \text{ डाळिंबे हें उत्तर.}$$

उपपत्ति.

३०० आंबे : १६ पैसे :: १० आंबे

$\frac{१६ \times १०}{३००}$ ही १० आंब्यांची किंमत झाली.

∴ १ पैसा : ३० डाळिंबे :: $\frac{१६ \times १०}{३००}$ पैसे.

∴ $\frac{१६ \times ३० \times १०}{३००} = १६$ डाळिंबे हें उत्तर.

याप्रमाणे पंचराशिकादिकांचे भाषांतर समाप्त झाले.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

मिश्रव्यवहार.

सूत्रम्—प्रमाणकालेन हतं प्रमाणं विमिश्रकालेन हतं फलं च । स्वयोगभक्ते च पृथक्स्थिते ते मिश्राहते मूल-कलांतरे स्तः ॥ यद्वेष्टकर्मख्यविधेस्तु मूलं मिश्राच्युतं तच्च कलांतरं स्यात् ॥

अर्थ—प्रमाणकालाने प्रमाणघनास गुणावे व विमिश्रका-लाने (मुदतीने) फलास (व्याजास) गुणावे. नंतर आलेले गुणाकार पृथक् दोन ठिकाणी मांडून त्यांस त्यांच्या बेरजेने भागून आलेल्या भागाकारांस मिश्राने (राशीने) गुणिले असतां अनुक्रमाने मुद्दल व व्याज हीं होतात.

अथवा इष्टराशिकाने मुद्दल काढावे. व ते राशीतून वजा करून व्याज काढावे.

उदाहरणम्—पंचकेन शतेनाब्दे मूलं स्वं सकलांतरम् ॥ सहस्रं चेत्पृथक्त्वत्र वद मूलकलांतरे ॥

अर्थ—दरमहा दर शेंकडा १ रुपये व्याजाप्रमाणे एकास रुपये दिले त्याने एका वर्षात व्याज मुद्दलमुद्धां १००० रुपये आणून दिले तर मुद्दल किती व व्याज किती हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{मुद्दल} = \frac{\text{मिश्रद्रव्य} \times \text{प्रमाण} \times \text{प्रमाणकाल}}{\text{प्रमाण} \times \text{प्रमाणकाल} + \text{मिश्रकाल} \times \text{व्याज.}}$$

या सारणीत उदाहरणांत दिलेल्या किमती ठेवून.

$$\text{मुद्दल} = \frac{१००० \times १०० \times १}{१०० \times १ + १२ \times ५}$$

(१२)

$$\therefore \text{मुद्दल} = \frac{१०००००}{१६०} = ६२५ \text{ हैं उत्तर.}$$

$$\text{व्याज} = \frac{\text{मिश्रद्रव्य} \times \text{व्याज} \times \text{मिश्रकाल}}{\text{व्याज} \times \text{मिश्रकाल} + \text{प्रमाण} \times \text{प्रमाणकाल}}$$

या सारणीति किमती देवून.

$$\text{व्याज} = \frac{१००० \times ५ \times १२}{५ \times १२ + १०० \times १}$$

$$\therefore \text{व्याज} = \frac{६०००}{१६०} = ३७५ \text{ हैं उत्तर.}$$

उपपत्ति.

क्ष = मुद्दल घरून.

१०० रु. . १ रु. व्या. .. क्ष. रु.

१ म. . .. १२ म.

या पंचराशिकावरून.

$$\text{व्याज} = \frac{१ \times १२ \times \text{क्ष}}{१०० \times १}$$

यांत क्ष मिळविण्या असतां मिश्र द्रव्य होतें.

$$\therefore \text{क्ष} + \frac{१ \times १२ \times \text{क्ष}}{१०० \times १} = १०००$$

$$\therefore \text{क्ष} \times १०० \times १ + १ \times १२ \times \text{क्ष} = १००० \times १०० \times १$$

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{१००० \times १०० \times १}{१०० \times १ + १ \times १२}$$

$$\therefore \text{मुद्दल} = \frac{\text{मिश्रद्रव्य} \times \text{प्रमाण} \times \text{प्रमाणकाल}}{\text{प्रमाण} \times \text{प्रमाणकाल} + \text{मिश्रकाल} \times \text{व्याज}}$$

आतां य = व्याज धरून

$$\begin{array}{lcl} १ \text{ रु. व्या.} & . & १०० \text{ रु. मु.} \quad \therefore \text{ य. व्याज} \\ १ \text{ म.} & . & \therefore १२ \text{ म.} \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{सम} \\ \text{व्यस्त} \end{array}$$

या पंचराशिकावरून.

$$\text{मुद्दल} = \frac{१०० \times १ \times य}{१ \times १२}$$

यांत व्याज य मिळविलें असतां राशि होते.

$$\therefore य + \frac{१०० \times १ \times य}{१ \times १२} = १०००$$

$$\therefore य \times १ \times १२ + १०० \times १ \times य = १००० \times १ \times १२$$

$$\therefore य = \frac{१००० \times १ \times १२}{१ \times १२ + १०० \times १}$$

$$\therefore \text{व्याज} = \frac{\text{मिश्रद्रव्य} \times \text{व्याज} \times \text{मिश्रकाल}}{\text{व्याज} \times \text{मिश्रकाल} + \text{प्रमाण} \times \text{प्रमाणकाल}}$$

म्हणून इष्टसूत्र सिद्धि झाली.

आतां दिलेलें उदाहरण इष्ट राशीनें सोडवून दाखवितों.

प्रथम मुद्दल १ रुपया इष्ट धरून

$$\begin{array}{lcl} १ \text{ म.} & . & १ \text{ रु. व्या.} \quad \therefore \quad १२ \text{ म.} \\ १०० \text{ रु.} & . & \therefore \quad १ \text{ रु.} \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{सम}$$

या पंचराशिकावरून.

$$\frac{१ \times १२ \times १}{१०० \times १} = \frac{१२}{१००} = \frac{३}{२५} \text{ हें व्याज झालें}$$

$$\text{मुद्दल } १ \text{ रुपया} + \frac{३}{२५} = \frac{२५}{२५} + \frac{३}{२५} = \frac{२८}{२५} \text{ रास झाली.}$$

∴ ६ रास : १ रु. मुद्दल :: १००० रा०

$$\frac{१००० \times १}{८} = \frac{१०००}{८} = १२५ रु. मुद्दल.$$

व १००० - १२५ = ८७५ व्याज हैं उत्तर.

सूत्रम्—अथ प्रमाणैर्गुणिताः स्वकाला व्यतीतकालघ्नः फलोद्धृतास्ते ॥ स्वयोगभक्ताश्च विमिश्रनिघ्नाः प्रयुक्तखंडानि पृथग्भवन्ति ॥

अर्थ—प्रमाणधनानीं प्रमाणकालास गुणून जे गुणाकार येतील त्यांस, खंडाच्या मुद्दतीनीं व्याजाचे दरास गुणून आलेल्या गुणाकारानीं क्रमानें भागावें. नंतर जे भागाकार येतील त्यांस त्यांच्या बेरजेनें भागून मिश्रधनानें गुणिलें असतां पृथक्खंडे येतील.

उदाहरणम्—यत्पंचकत्रिकचतुष्कशतेन दत्तं खंडैस्त्रिभिर्गणकनिष्कशतं षडूनम् ॥ मासेषु सप्तदशपंचसु तुल्यमाप्तं खंडत्रयेऽपि हि फलं वद खंडसंख्याम् ॥

अर्थ—एका गृहस्थापार्शीं ९४ रुपये होते ते त्यानें तीन असाणींस ३ खंडे करून दरमहा दर शेंकडा १ रु०, ३ रु०, ४ रु०, व्याजानें दिले, नंतर त्यांनीं क्रमानें ७, १०, १५ या महिन्यांनीं सारखें सारखें व्याज आणून दिलें तर खंडसंख्या काय हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\frac{१ \times १००}{५ \times ७} = \frac{३०}{७}$$

$$\frac{१ \times १००}{३ \times १०} = \frac{१०}{३}$$

(११)

$$\frac{१ \times १००}{४ \times ५} = ५$$

$$\frac{२०}{७} + \frac{१०}{३} + ५ = \frac{२३५}{२१}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{२०}{७} \times \frac{२१}{२३५} \times १४ = २४ \\ \frac{१०}{३} \times \frac{२१}{२३५} \times १४ = २८ \\ ५ \times \frac{२१}{२३५} \times १४ = ४२ \end{array} \right\} \text{ हैं उत्तर.}$$

उपपत्ति.

$$\left. \begin{array}{l} \text{क्ष} = \text{प्रथम खंड} \\ \text{य} = \text{दुसरें खंड} \\ \text{ज्ञ} = \text{तिसरें खंड} \end{array} \right\} \text{ अशी कल्पना करून}$$

$$१०० \text{ रु. . } ९ \text{ रु. व्या. } \therefore \text{क्ष रु.}$$

$$१ \text{ म. . } \therefore ७ \text{ म.}$$

$$\text{प्रथम खंडाचें व्याज} = \frac{\text{क्ष} \times ७ \times ९}{१०० \times १} = \frac{\text{क्ष}}{\text{अ}}$$

$$\text{अशी संज्ञा देऊन अ} = \frac{१०० \times १}{७ \times ९} \text{ झालें.}$$

$$\text{आतां } १०० \text{ रु. . } ३ \text{ रु. व्या. } \therefore \text{य रु.}$$

$$१ \text{ म. . } \therefore १० \text{ म.}$$

$$\therefore \text{दुसऱ्या खंडाचें व्याज} = \frac{१० \times ३ \times १०}{१०० \times १} = \frac{\text{य}}{\text{ब}}$$

$$\text{ही संज्ञा देऊन ब} = \frac{१०० \times १}{१० \times ३} \text{ झालें.}$$

$$\text{पुनः } १०० \text{ रु. . } ४ \text{ रु. व्या. } \therefore \text{ज्ञ}$$

$$१ \text{ म. . } \therefore ९ \text{ म.}$$

$$\therefore \text{तिसऱ्या खंडाचें व्याज} = \frac{४ \times ९ \times ९}{१०० \times १} = \frac{\text{ज्ञ}}{\text{क}}$$

(९६)

अशी संज्ञा देऊन $k = \frac{100 \times 1}{9 \times 8}$ सारें.

प्रत्येक खंडाचें व्याज समान आहे.

$$\therefore \frac{क्ष}{अ} = \frac{य}{व} \therefore य = \frac{क्ष व}{अ}$$

$$\frac{क्ष}{अ} = \frac{ज्ञ}{क} \therefore ज्ञ = \frac{क्ष क}{अ}$$

$$\text{आणि } क्ष + य + ज्ञ = ९४$$

यांत य व ज्ञ या दोघांच्या किमती ठेवून

$$क्ष + \frac{क्ष व}{अ} + \frac{क्ष क}{अ} = ९४$$

$$\therefore क्ष \left(\frac{अ + व + क}{अ} \right) = ९४$$

$$\therefore क्ष \frac{अ}{अ + व + क} \times ९४ \dots\dots\dots (१)$$

ही किमत य = $\frac{क्ष व}{अ}$ या समीकरणांत ठेवून

$$य = \frac{व}{अ + व + क} \times ९४ \dots\dots\dots (२)$$

आणि ज्ञ = $\frac{क्ष क}{अ}$ यांत क्ष ची किमत ठेवून

$$ज्ञ = \frac{क}{अ + व + क} \times ९४ \dots\dots\dots (३)$$

आतां या तिन्ही समीकरणांत अ, व, क, यांच्या किमती ठेवून.

(१७)

$$\begin{aligned}
 & \frac{१०० \times १}{७ \times ९} \\
 \text{झ} = & \frac{\frac{१०० \times १}{७ \times ९} + \frac{१०० \times १}{३ \times १०} + \frac{१०० \times १}{४ \times ९} \times ९४}{\frac{१०० \times १}{३ \times १०}} \\
 \text{य} = & \frac{\frac{१०० \times १}{७ \times ९} + \frac{१०० \times १}{३ \times १०} + \frac{१०० \times १}{४ \times ९} \times ९४}{\frac{१०० \times १}{४ \times ९}} \\
 \text{झ} = & \frac{\frac{१०० \times १}{७ \times ९} + \frac{१०० \times १}{३ \times १०} + \frac{१०० \times १}{४ \times ९} \times ९४}{\frac{१०० \times १}{३ \times १०}}
 \end{aligned}$$

म्हणून सर्व इष्टसिद्धि झाली.

सूत्रम्—प्रक्षेपका मिश्रहता विभक्ताः प्रक्षेपयोगेन पृथक्फलानि ॥

अर्थ—व्यापाराकरितां अनेकांनीं घातलेलीं जीं भांडवलें त्यांस त्यांच्या वेरजेनें प्रत्येकीं भागून त्यांस मिश्रधनानें (फायद्यासह सर्वांच्या भांडवलानें) गुणिले असतां प्रत्येकांचीं भांडवलें येतात.

उदाहरणम्—पंचाशदेकसहिता गणकाष्टषष्टिः पंचो-
निता नवतिरादिधनानि येषाम् । प्राप्ता विमिश्रितधनै-
स्त्रिंशती त्रिभिस्तैर्वाणिज्यतो वद विभज्य धनानि तेषाम् ॥

अर्थ—अ, व, क, हे तीन असामी सर्कत वांटणीनें व्यापार करीत होते त्यांत अचे ९१ रुपये, वचे ६८ रुपये व कचे ६९ रुपये होते. व त्यांस व्यापारांत ३०० रुपये झाले तेन्हां

(५८)

ते तिघांनी वांटून घेतलें असतां कसे कसे वांटणीस येतील
हें सांग :

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$५१ + ६८ + ८५ = २०४ \quad \text{हें सर्व भांडवल झालें.}$$

$$\frac{५१ \times ३००}{२०४} = ७५ \text{ ही अची वांटणी.}$$

$$\frac{६८ \times ३००}{२०४} = १०० \text{ ही बची वांटणी.}$$

$$\frac{८५ \times ३००}{२०४} = १२५ \text{ ही कची वांटणी.}$$

} हें उत्तर.

उपपत्ति.

$$अ + ब + क : अ :: ३००$$

$$अ + ब + क \text{ याचे रुपयांची बेरीज} = \text{प्रक्षेपयोग}$$

$$३०० = \text{मिश्रधन}$$

$$\therefore \text{अचे वांटणीस धन} = \frac{अ \times \text{मिश्रधन}}{\text{प्रक्षेपयोग}}$$

याच पद्धतीनें केले असतां

$$ब चे धन = \frac{ब \times \text{मिश्रधन}}{\text{प्रक्षेपयोग}}$$

$$क चे धन = \frac{क \times \text{मिश्रधन}}{\text{प्रक्षेपयोग}}$$

म्हणून इष्टसूत्र सिद्धि झाली.

सूत्रम्—भजेच्छिदोशैरथ तैर्विमिश्रै रूपं भजेत्स्यात्प-
रिपूर्तिकालः ॥

अर्थ—तळीं, विहिरी, इत्यादिकांस जे झरे अगर नळ
असतात त्यांनीं प्रत्येकीं भरण्यास जो काळ लागतो, त्यांच्या

छेदास त्यांच्याच अंशांनीं प्रत्येकीं भागावें. नंतर आलेल्या भागाकारांच्या बेरजेनें १ स भागिलें असतां तळावादिक् भरण्याचा काळ येतो.

उदाहरणम्—ये निर्झरा दिनदिनार्धतृतीयषष्ठैः संपूरयन्ति हि पृथक्पृथगेव मुक्ताः ॥ वापीं यदा युगपदेव सखे विमुक्तास्ते केन वासरलवेन तदा वदाऽऽशु ॥

अर्थ—एका विहिरीस चार झरे आहेत. ते क्रमानें १ दिवस $\frac{1}{2}$ दि; $\frac{1}{3}$ दि, $\frac{1}{4}$ दि. इतक्या काळांत पाण्यानें विहीर भरतात. जर ते चारी झरे एकदम सोडले तर किती बेळांत विहीर भरेल.

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

१, २, ३, ६ या छेदांस १, १, १, १ या अंशांनीं पृथग्भागून १, २, ३, ६ यांची बेरीज १२ हिनें १ स भागून $\frac{1}{12}$ दिवस म्हणजे ५ घटका हें उत्तर.

उपपत्ति.

क्ष = काल धरून

१ दि: : १ वापी :: क्ष

∴ क्ष = पहिल्या झऱ्याचें पाणी.

$\frac{1}{2}$ दि. : १ वा :: क्ष

$\frac{क्ष}{\frac{1}{2}}$ = दुसऱ्या झऱ्याचें पाणी

$\frac{क्ष}{\frac{1}{3}}$ = तिसऱ्या झऱ्याचें पाणी

$\frac{क्ष}{\frac{1}{4}}$ = चवथ्या झऱ्याचें पाणी

(६०)

$$\therefore \frac{१९}{१} + \frac{१९}{२} + \frac{१९}{३} + \frac{१९}{४} = १$$

$$१९ = \frac{१}{\frac{१}{१} + \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४}}$$

$$\therefore १९ = \frac{१}{\frac{१}{१} + \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४}}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

सूत्रम्—पण्यैः स्वमूल्यानि भजेत्स्वभागैर्हत्वा तदैक्येन भजेच्च तानि ॥ भागांश्च मिश्रेण धनेन हत्वा मूल्यानि पण्यानि यथाक्रमं स्युः ॥

अर्थ—धान्यप्रमाणांनी आपल्या किमतीस मागून आप-
आपल्या भागांनी गुणून जे गुणाकार येतील त्यांच्या बेरजेने
त्या गुणाकारांस व भागांस भागिले व मिश्रधनाने गुणिले
असतां धान्यांची मूल्ये व धान्यांची परिमाणे कमाने येतील.

उदाहरणम्—सार्धं तण्डुलमानकत्रयमहो द्रम्मेण माना-
ष्टकं मुद्रानां च यदि त्रयोदशमिता एता वणिकाकिणीः ॥
आदायाऽऽर्षय तण्डुलांश्चयुगुलं मुद्रैकभागान्वितं क्षिप्रं
क्षिप्रभुजो व्रजेमहि यतः सार्धोऽग्रतो यास्यति ॥

अर्थ—एक द्रम्मास ३ शेर तांदुळ मिळतात, व एक
द्रम्मास ८ शेर मूग विकत मिळतात. तर ३३ द्रम्म घेऊन १
भाग मूग व २ भाग तांदुळ देणे आहे तर किती व्यावेत, व
त्यांच्या किमती काय हें सांग ?

(६१)

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{तंदुलमूल्य} = \frac{\text{स्वमूल्य}}{\text{तंदुलप्रमाण}} \times \text{तंदुलभाग} \quad \text{मिश्रणने}$$

$$\frac{\text{स्वमूल्य}}{\text{तंदुलप्रमाण}} \times \text{तंदुलभाग} + \frac{\text{स्वमूल्य}}{\text{मुद्रप्रमाण}} \times \text{मुद्रभाग}$$

या सारणीमिव्हे उदाहरणांत दिलेल्या किंमती ठेवून.

$$\begin{aligned} \text{तंदुलमूल्य} &= \frac{\frac{9}{16} \times 2}{\frac{9}{16} \times 2 + \frac{1}{16} \times 9} \times \frac{93}{16} \\ &= \frac{\frac{9}{8}}{\frac{9}{8} + \frac{9}{16}} \times \frac{93}{16} = \frac{1}{2} \text{ द्रम्म हें उत्तर.} \end{aligned}$$

$$\text{मुद्रमूल्य} = \frac{\frac{1}{16} \times 9}{\frac{9}{16} \times 2 + \frac{1}{16} \times 9} \times \frac{93}{16} = \frac{9}{112} \text{ द्रम्म हें उत्तर.}$$

$$\text{तांदुळ} = \frac{2}{\frac{9}{16} \times 2 + \frac{1}{16} \times 9} \times \frac{93}{16} = \frac{9}{16} \text{ शेर हें उत्तर.}$$

$$\text{मूग} = \frac{9}{\frac{9}{16} \times 2 + \frac{1}{16} \times 9} \times \frac{93}{16} = \frac{9}{16} \text{ शेर हें उत्तर.}$$

उपपत्ति.

$$\text{क्ष} = \text{मूग धरूं}$$

$$\therefore 2 \text{ क्ष} = \text{तांदूळ झालें.}$$

$$\frac{9}{16} \text{ शेर} \therefore 1 \text{ द्रम्म} :: 2 \text{ क्ष}$$

$$\therefore \frac{2 \text{ क्ष}}{\frac{9}{16}} = \text{तांदूळ मूल्य}$$

(६२)

आणि < शेर : १ द्रम्म :: क्ष

∴ क्ष = मुद्रमौल्य.

आतां तंडुलमूल्य व मुद्रमूल्य $\frac{१३}{६४}$ द्रम्म आहे, असे उदाहरणांत सांगितले

$$\therefore \frac{२ क्ष}{६४} + \frac{क्ष}{८} = \frac{१३}{६४}$$

$$\therefore क्ष = \frac{\frac{१३}{६४}}{\frac{२}{६४} \times २ + \frac{१}{८} \times १} \text{ हे मूग.}$$

$$\therefore १ क्ष = \frac{२}{\frac{२}{६४} \times २ + \frac{१}{८} \times १} \times \frac{१३}{६४} \text{ हे तांदूळ}$$

$$\frac{६४}{६४} \text{ शेर : १ द्रम्म :: } \frac{२}{\frac{२}{६४} \times २ + \frac{१}{८} \times १} \times \frac{१३}{६४}$$

$$\therefore \frac{\frac{२}{६४} \times २}{\frac{२}{६४} \times २ + \frac{१}{८} \times १} \times \frac{१३}{६४} = \text{तंडुलमूल्यम्}$$

$$< \text{शेर : १ द्रम्म :: } \frac{\frac{१३}{६४}}{\frac{२}{६४} \times २ + \frac{१}{८} \times १}$$

$$\therefore \frac{\frac{१}{८} \times १}{\frac{२}{६४} \times २ + \frac{१}{८} \times १} \times \frac{१३}{६४} = \text{मुद्रमूल्यम्}$$

म्हणून सर्व इष्टसिद्धि झाली.

उदाहरणम्—कर्पूरस्य वरस्य निष्कयुगलेनैकं पलं प्राप्यते वैश्यानंदनचंदनस्य च पलं द्रम्माष्टभागेन चेत् ॥ अष्टांशेन तथाऽगरोः पलदलं निष्केण मे देहि तान्भागैरेककषोडशाष्टकमितैर्धूपं चिकीर्षाम्यहम् ॥

अर्थ— २ निष्कांस उत्तम कापूर एक पल मिळतो, $\frac{1}{2}$ द्रमास १ पल चंदन मिळतो, व $\frac{1}{2}$ द्रम्मास $\frac{1}{2}$ पल अगरु मिळतो. तर १ निष्कामध्ये ते तिन्ही पदार्थ १, १६, ८ अनुक्रमे अशा भागांनी व्यावयाचे ते किती किती येतील व त्यांच्या प्रत्येकांच्या किमती काय हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$२ \text{ निष्क } \times १६ = ३२ \text{ द्रम्म.}$$

$$१ \text{ निष्क } = १६ \text{ द्रम्म. मिश्रघन}$$

$$\begin{aligned} \text{कापराची किंमत} &= \frac{\frac{३२}{१} \times १}{\frac{३२}{१} + \frac{१}{२} \times १६ + \frac{१}{२} \times ८} \times १६ \\ &= १२\frac{१}{२} \text{ द्रम्म हें उत्तर.} \end{aligned}$$

तसेंच मागच्या उदाहरणाच्या पद्धतीने अन्य किमती काढून

$$\text{चंदनाची किंमत} = \frac{८}{१} \text{ द्रम्म हें उत्तर.}$$

$$\text{अगरुची किंमत} = \frac{८}{१} \text{ द्रम्म हें उत्तर.}$$

$$\text{कापूरपल } \frac{५}{६}; \text{ चंदनपल } \frac{१}{६}; \text{ अगरुपल } \frac{५}{६}; \text{ हें उत्तर.}$$

सूत्रम्—नरघ्नदानोनितरत्नशेषैरिष्टे हृते स्युः खलु मूल्य-संख्याः ॥ शेषैर्हृते शेषवधे पृथक्स्थैरभिन्नमूल्यान्यथवा भवन्ति ॥

अर्थ—मनुष्यसंख्येने रत्नदानसंख्येस गुणून तो गुणाकार भिन्न भिन्न रत्नांतून वजा करावा. ज्या बाक्या राहतील

त्यांनी कल्पित इष्टसंख्येस भागिले असतां भिन्न जातीच्या रत्नाच्या किंमती येतील.

अथवा वरील रीतीत सांगितल्याप्रमाणे बाक्या काढून त्यांचा परस्पर गुणाकार करून त्यास त्या निरनिराळ्या बाक्यांनी भागिले असतां पूर्णाकात्मक रत्नांच्या किंमती येतात.

उदाहरणम्—माणिक्याष्टकमिद्रनीलदशकं मुक्ताफला-
नां शतं सद्रज्जाणि च पंचरत्नवाणिजां येषां चतुर्णां धनम् ॥
संग्रहो हवशेन ते निजधनाद्वैकमेकं मिथो जातास्तुल्य-
धनाः पृथग्वद सखे तद्रत्नमूल्यानि मे ॥

अर्थ—एका शहरामध्ये चार गृहस्थ होते, त्यांपैकी एका जवळ ८ माणिक्ये, दुसऱ्या जवळ १० नीळ, तिसऱ्यापाशीं १०० मुक्ताफले, व चवथ्यापाशीं ५ वज्र होते. त्यांनी आप-
आपल्या रत्नांपैकीं एकेक रत्न प्रत्येकास देऊन ते तुल्यधन झाले तर त्या रत्नांच्या किंमती काय हें सांग !

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथे रत्नसंख्या ८, १०, १००, ५ दान संख्या १ व मनुष्य संख्या ४ आहे.

$$८ - ४ \times १ = ४$$

$$१० - ४ \times १ = ६$$

$$१०० - ४ \times १ = ९६$$

$$५ - ४ \times १ = १$$

आतां इष्ट संख्या ९६ घटून

$$\frac{९६}{४} = २४ \text{ दर माणिक्याची किंमत}$$

$$\frac{९६}{६} = १६ \text{ नीळाची}$$

$$\frac{९६}{९६} = १ \text{ मोत्याची}$$

$$\frac{९६}{१} = ९६ \text{ वज्राची}$$

हे उत्तर.

(६९)

दुसऱ्या रीतीने उदाहरण सोडवूं.

पहिल्या रीतीने निघालेल्या बाक्या ५, ६, ९६, १ बांचा परस्पर गुणाकार २३०४ यास प्रत्येक बाकीने मागून ५७६, ३८४, २४, २३०४ याप्रमाणे क्रमाने माणिक्य, नील, मोती, वज्र यांच्या किमती झाल्या हे उत्तर.

उपपत्ति.

मा = माणिकाची किंमत	}	घरून
नी = नीलाची		
मु = मोत्याची		
व = वज्राची		

माणि < = अ

१० = ब

१०० = क

१ = ड

अशा संज्ञा देऊन

१ माणि० : मा किंमत :: (अ - १) माणि.

∴ (अ - १) मा = ही किंमत माणिकवाल्यापाशीं एकेक माणिक प्रत्येकास अशीं तीन माणके देऊन जी शिळक राहिली त्यांची समजा.

अशीच त्रैराशिके करून

(ब - १) नी = दुसऱ्याच्या रत्नाची किंमत

(क - १) मु = तिसऱ्याच्या

(ड - १) व चवथ्याच्या

आतां या प्रत्येकांच्या रत्नांच्या किमतीमाग्यें मिळालेल्या तीन तीन रत्नांच्या किमती मिळविण्याने साम्यता होईल.

(६६)

$$(अ-३) मा + नी + व + मु = (ब-३) नी + मा + व + मु$$

$$\therefore नी = \left(\frac{अ-४}{ब-४} \right) मा (१)$$

$$(ब-३) नी + मा + व + मु = (क-३) मु + नी + व + मा$$

$$\therefore मु = \left(\frac{अ-४}{क-४} \right) मा (२)$$

$$(क-३) मु + नी + व + मा = (ड-३) व + नी + मा + मु$$

$$\therefore व = \left(\frac{अ-४}{ड-४} \right) मा (३)$$

वरील तीन समीकरणांवरून असें दिसून येईल, कीं माणिक्याची कोणतीही इष्टसंख्या धरिली असतां त्याच्या तितक्या तितक्या पट किंमती नीलादिकांच्या निघतील. करितां माणिक्याची किंमत $\frac{\text{इष्ट}}{अ-४ \times १}$ धरून ही किंमत सर्वांत ठेवतों.

$$\therefore मा = \frac{\text{इष्ट}}{अ-४ \times १}$$

$$\therefore नी = \frac{\text{इष्ट}}{ब-४ \times १}$$

$$\therefore मु = \frac{\text{इष्ट}}{क-४ \times १}$$

$$\therefore व = \frac{\text{इष्ट}}{ड-४ \times १}$$

अथवा माणिक्याची इष्ट किंमत

$$\frac{(अ-४)(ब-४)(क-४)(ड-४)}{अ-४} \text{ ही धरून}$$

(६७)

बाकी सर्वांच्या किंमतींत ठेवून

$$मा = \frac{(अ-४)(ब-४)(क-४)(ड-४)}{अ-४}$$

$$नी = \frac{(अ-४)(ब-४)(क-४)(ड-४)}{ब-४}$$

$$मु = \frac{(अ-४)(ब-४)(क-४)(ड-४)}{क-४}$$

$$व = \frac{(अ-४)(ब-४)(क-४)(ड-४)}{ड-४}$$

म्हणून सर्वेष्ट सिद्धि झाली.

सूत्रम्—सुवर्णवर्णाहतियोगराशौ स्वर्णैक्यभक्ते कन-
कैक्यवर्णः ॥ वर्णो भवेच्छोधितहेमभक्ते वर्णोद्धृते शोधित-
हेमसंख्या ॥

अर्थ—सोनें व त्याचा कस यांचा पृथक् पृथक् गुणाकार
करून त्या गुणाकारांच्या बेरजेस सुवर्णैक्यानें भागिलें असतां
मिश्रवर्ण येतो; व शोधित सुवर्णानें भागिलें असतां शुद्ध सोन्या-
चा कस येतो; व कसानें भागिलें असतां शुद्ध सोनें येतें.

उदाहरणम्—विश्वार्कशुद्धशवर्णसुवर्णमाषा दिग्वैद-
लोचनयुगप्रमिताः क्रमेण ॥ आवर्तितेषु वद तेषु सुवर्ण-
वर्णस्तूर्णं सुवर्णगणितज्ञ वर्णिग्भवेत्कः ॥ ते शोधनेन यदि
विंशतिरुक्तमाषाः स्युः षोडशद्रविणवर्णमितिस्तदा का ॥
चेच्छोधितं भवति षोडशवर्णहेम ते विंशतिः कति तदा तु
भवन्ति माषाः ॥

अर्थ—१३ कसाचे १० मासे सोनें, १२ कसाचे ४ मासे,

(६८)

११ कसाचे २ मासे, १० कसाचे ४ मासे. याप्रमाणे सोने आहे हें एकत्र आटविलें असतां जें सोने होईल त्याचा कस काय ? व ते २० मासे मिश्रसोने शुद्ध केलें असतां १६ मासे होतात तर त्या सोन्याचा कस काय ? व ते मिश्रसोने शुद्ध केलें असतां जर १६ कस लागतो तर २० मासे सोने वजनानें किती मासे भरेल हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\begin{aligned} \text{मिश्रवर्ण} &= \frac{१३ \times १० + १२ \times ४ + ११ \times २ + १० \times ४}{१० + ४ + २ + ४} \\ &= \frac{२४०}{२०} = १२ \text{ हें उत्तर.} \end{aligned}$$

$$\text{शुद्ध सोन्याचा कस} = \frac{२४०}{१६} = १५ \text{ हें उत्तर.}$$

$$\text{सोन्याचें वजन} = \frac{२४०}{१६} = १५ \text{ हें उत्तर.}$$

उपपत्ति.

क्ष = मिश्रवर्ण धरून

१३ वर्ण : १० मासे :: क्ष वर्ण. व्यस्त त्रैराशिक

$$\text{क्ष वर्णाचे माप} = \frac{१३ \times १०}{क्ष}$$

याच पद्धतीने सर्वांचे माप करून

$$\frac{१३ \times १०}{क्ष} + \frac{१२ \times ४}{क्ष} + \frac{११ \times २}{क्ष} + \frac{१० \times ४}{क्ष} = २०$$

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{१३ \times १० + १२ \times ४ + ११ \times २ + १० \times ४}{२०}$$

\therefore मिश्रवर्णाच्या रीतीची सिद्धि झाली.

(६९)

आतां शुद्ध सोन्याचा वर्ण (कस) = क्ष धरून पूर्व पद्धतीनेच कृति करून

$$\frac{१३ \times १०}{क्ष} + \frac{१२ \times ४}{क्ष} + \frac{११ \times २}{क्ष} + \frac{१० \times ४}{क्ष} = १६$$

$$\therefore क्ष = \frac{२४०}{१६}$$

म्हणून शुद्ध सोन्याच्या कसाच्या रीतीची सिद्धि झाली.

तसेच क्ष = माष धरून

पूर्व क्रिया करून

$$क्ष = \frac{१३ \times १० + १२ \times ४ + ११ \times २ + १० \times ४}{१६}$$

\therefore सर्व इष्टसिद्धि झाली.

सूत्रम्—स्वर्णैक्यानिघ्राद्युतिजातवर्णात्सुवर्णतद्वर्णवधै-
क्यहीनात् ॥ अज्ञातवर्णाग्निजसंख्ययाऽऽप्तमज्ञातवर्णस्य
भवेत्प्रमाणम् ॥

अर्थ—सोन्याच्या वजनांच्या बेरजेने मिश्रसोन्याचे कसास गुणून त्यांतून, सोन्याची वजने व त्यांचे कस यांच्या गुणाका-
रांची बेरीज वजा करून बाकीस ज्याचा कस अज्ञात आहे
अशा सोन्याच्या वजनाने भागिले असतां अज्ञात कसाचे
प्रमाण येते.

उदाहरणम्—दशैश्वर्णा वसुनेत्रमाषा अज्ञातवर्णस्य
षष्ठेदक्ये ॥ जातं सखे द्वादशकं सुवर्णमज्ञातवर्णस्य वद
प्रमाणम् ॥

अर्थ—१० कसाचे सोने ८ मासे, ११ कसाचे २ मासे

व अज्ञात कसाचें ६ मासे; हीं तिन्हीं एकत्र करून मिश्र सोन्याचा कस १२ झाला तर ज्याचा कस माहीत नाही असे ६ मासे सोने किती कशी होतें हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

८, २, ६ यांची बेरीज १६ यास १२ नीं गुणून १९२ यांतून सोन्याची वजनं व त्यांचे कस यांच्या गुणाकारांची बेरीज १०२ वजा करून शेष ९० राहिले यांस ६ नीं भागून १५ कस आला हें उत्तर.

उपपत्ति.

मागच्या सूत्रावरून

$$\text{मिश्रवर्ण} = \frac{\text{सुवर्णवर्णाहतियोग}}{\text{स्वर्णैक्य}}$$

$$\therefore \text{मिश्रवर्ण} \times \text{स्वर्णैक्य} = \text{सुवर्णवर्णाहतियोग}$$

$$\text{वर्ण} \times \text{स्वर्णैक्य} = १० \times ८ + ११ \times २ + \text{अज्ञातवर्ण} \times ६$$

$$\therefore \text{अज्ञातवर्ण} = \frac{\text{व} \times \text{स्व.} - (१० \times ८ + ११ \times २)}{६}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

सूत्रम्—स्वर्णैक्यनिघ्नो युतिजातवर्णः स्वर्णवर्णैक्य-
वियोजितोऽसौ ॥ अहेमवर्णाग्निजयोगवर्णविश्लेषभक्तोऽ
विदिताग्निजं स्यात् ॥

अर्थ—मिश्रणापासून उत्पन्न झालेल्या कसास सोन्याच्या वजनाच्या बेरीजेने गुणून त्यांतून, सोन्याची वजनं व कस यांच्या गुणाकारांची बेरीज वजा करून बाकीस, अज्ञातसो-
न्याचा कस व मिश्रकस यांच्या अंतराने भागिले असतां अज्ञात सोन्याचें मान समजतें.

(७१)

उदाहरणम्—दर्शेद्रवर्णा गुणचंद्रमाषाः किञ्चित्तथा षोडशकस्य तेषाम् ॥ जातं युतौ द्वादशकं सुवर्णं कतीह ते षोडशवर्णमाषाः ॥

अर्थ—१० व १४ कशी सुवर्णं क्रमानें ३ व १ मासा, व १६ कशी सुवर्णं कांहीं मासे होते. हीं एकत्र करून १२ कशी सोनें झालें तर यांत १६ कशी सोनें किती हें सांग ॥

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{अज्ञात सोन्याचें मान} = \frac{१२ (३ + १) - (१० \times ३ + १४ \times १)}{१६ - १२}$$

$$\text{अज्ञात सोनें} = \frac{२८ - (३० + १४)}{४}$$

∴ अज्ञात सोनें = १ मासा हें उत्तर.

उपपत्ति.

क्ष = अज्ञात सुवर्णाचें मान धरून

$$\text{मिश्रवर्ण} = \frac{\text{सुवर्णवर्णाहतियोग}}{\text{स्वर्णैक्य}}$$

या सारणीमध्ये उदाहरणांत दिलेल्या किंमती ठेवून.

$$१२ = \frac{१० \times ३ + १४ \times १ + १६ \times \text{क्ष}}{३ + १ + \text{क्ष}}$$

$$\therefore १२ \times ३ + १२ \times १ + १२ \times \text{क्ष} = १० \times ३ + १४ \times १ + १६ \text{क्ष}$$

$$\therefore १६ \text{क्ष} - १२ \text{क्ष} = १२ (३ + १) = (१० \times ३ + १४ \times १)$$

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{१२ (३ + १) - (१० \times ३ + १४ \times १)}{१६ - १२}$$

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{\text{युतिवर्णैक्य} \times \text{स्वर्णैक्य} - \text{स्वर्णवर्णैक्य}}{\text{अहेमवर्णाग्निजवर्ण} - \text{युतिवर्ण}}$$

इष्ट सिद्धि ज्ञाली.

सूत्रम्—साध्येनोनोऽनल्पवर्णो विधेयः साध्योऽनल्पवर्णो नितश्च । इष्टधुण्णे वेषके स्वर्णमाने स्यातां ल्पानल्पयोर्वर्णयोस्ते ॥

अर्थ—मोठ्या कसांतून साध्य म्हणजे मिश्र कस करावा. आणि मिश्र कसांतून त्यापेक्षां लहान कस वजा करूनंतर ज्या बाक्या राहतील त्यांस कल्पित इष्ट संख्येने गुणित असतां क्रमानें लहान व मोठ्या कसाच्या सोन्याचीं वजनं येत.

उदाहरणम्—हाटकगुटिके षोडश दशवर्णे तद्युतौ सजातम् । द्वादशवर्णसुवर्णं ब्रूहि तयोः स्वर्णमाने मे ॥

अर्थ—सोन्याच्या २ मोळ्या १६ व १० कशी आल्या एकत्र करून त्या सोन्यास १२ कस लागला तर त्या वजनं काय हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

मोठा कस १६ यांतून मिश्रकस १२ वजा करून ४ बाकी, व १० कसांतून लहान कस १० वजा करून बाकी २ राहिली. या बाक्या इष्ट १ यानें गुणिलें असतां ४ व २ मासे हें उत्तर याप्रमाणें उत्तरें इष्टानें येतील.

उपपत्ति.

क्ष = १६ कशी सोनें, आणि

य = १० कशी सोनें धरून

मिश्रवर्ण = $\frac{\text{सुवर्णवर्णाहतियोस}}{\text{स्वर्णैक्य}}$

(७३)

या सारणीत किंमती ठेवून.

$$१२ = \frac{१६ क्ष + १० य}{क्ष + य}$$

$$\therefore १२ क्ष + १२ य = १६ क्ष + १० य$$

$$१६ क्ष - १२ क्ष = १२ य - १० य$$

$$\therefore क्ष = \frac{१२ य - १० य}{१६ - १२} = \frac{१२ - १०}{१६ - १२} य$$

$$येथें \frac{य}{१६ - १२} = इष्ट धरून.$$

$$क्ष = (१२ - १०) इष्ट; य = (१६ - १२) इष्ट.$$

\therefore इष्टसिद्धि झाली.

सूत्रम्—एकाग्रकोत्तरा अंका व्यस्ता भाज्याः क्रम-
स्थितैः । परः पूर्वेण संगुण्य तत्परस्तत्परेण च ॥ एकद्वि-
त्र्यादिभेदाः स्युरिदं साधारणं स्मृतम् ॥ छंदश्चित्युत्तरे-
छंदस्युपयोगोऽस्य तद्विदाम् । मुखावाहनभेदादौ खंडमे-
रौ च शिल्पके । वैद्यके रसभेदीये तन्नोक्तं विस्तृतेर्भयात् ।

अर्थ—वस्तुसंख्येतून अमुक वस्तु प्रत्येक वेळा घेऊन
संयोग किती होतील हें काढावयाचें असल्यास वस्तुसंख्येस १
ने भागावें, वस्तु संख्येत १ कमी करून २ ने भागावें, वस्तु
संख्येत २ कमी करून ३ ने भागावें. वस्तुसंख्येत ३ कमी
करून ४ ने भागावें. इत्यादि क्रिया प्रत्येक वेळां जितक्या वस्तु
व्याव्याच्या असतील तत्संख्यांक करावी नंतर आलेल्या भागा-
कारांचा परस्पर गुणाकार केला असतां संयोग होतात.

छंदाचा विस्तार करणें, गवाक्षरचनाभेद, तालप्रस्तार, रस-
भेद इत्यादिकांचे ठिकाणीं विशेष उपयोग आहे तथापि विस्तार
अयास्तव विशेष प्रकार न सांगतां साधारण रीति सांगितली आहे.

उदाहरणम्—प्रस्तारे मित्र गायत्र्याः स्युः पादे व्य-
क्तयः कति । एकादिगुरवश्चाऽऽशु कथ्यतां तत्पृथक्पृथक् ॥

अर्थ—६ अक्षरी गायत्री छंदांत एकेक गुरु अक्षर घेऊन,
दोन दोन अक्षरें घेऊन, तीन तीन घेऊन चार चार, पांच
पांच, सहा सहा, घेऊन भेद किती किती होतील ?

उत्तरानिष्काशनक्रिया.

$\frac{6}{1}$	= ६ एकेक अक्षर घेऊन होणारे भेद.
$\frac{6}{2} \times \frac{5}{1}$	= १५ दोन दोन अक्षरांचे संयोग.
$\frac{6}{3} \times \frac{5}{2} \times \frac{4}{1}$	= २० तीन तीन " "
$\frac{6}{4} \times \frac{5}{3} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{1}$	= १५ चार चार " "
$\frac{6}{5} \times \frac{5}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{1}$	= ६ पांच पांच " "
$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$	= १ सहा सहा " हें उत्तर.

उदाहरणम्—एकद्वित्र्यादिमूषा वहनमितिमहो ब्रूहि मे
भूमिभर्तुर्हर्म्ये रम्येऽष्टमूषे चतुरविरचिते ब्रह्मक्षेत्रालावि-
शाले । एकद्वित्र्यादियुक्त्या मधुरकटुकपायाम्लकक्षारति-
क्तैरेकस्मिन्पट्टरसैः स्युर्गणक कति वद व्यंजने व्यक्तिभेदाः

अर्थ—एका राजवाड्यास ८ दरवाजे होते त्यांतून एकेक,
दोन दोन इत्यादि दरवाजे बंद करून वाड्याचे जे जे भेद
होतील ते सांग ? व मधुर, कटु, कषाय, अंबट, क्षार, तिक्त,
या सहां रसांपैकीं एकेक, दोन दोन, इत्यादि रस घेऊन चटण्या
किती किती तऱ्हेच्या होतील हें सांग ?

(७६)

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$\frac{८}{१}$	= ८ एकेक दरवाजा उघडा ठेवून
$\frac{८ \cdot ७}{१ \cdot २}$	= २८ दोन दोन " होणारे भेद.
$\frac{८ \cdot ७ \cdot ६}{१ \cdot २ \cdot ३}$	= ५६ तीन तीन " "
$\frac{८ \cdot ७ \cdot ६ \cdot ५}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४}$	= ७० चार चार " "
$\frac{८ \cdot ७ \cdot ६ \cdot ५ \cdot ४}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५}$	= ५६ पांच पांच " "
$\frac{८ \cdot ७ \cdot ६ \cdot ५ \cdot ४ \cdot ३}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५ \cdot ६}$	= २८ सहा सहा " "
$\frac{८ \cdot ७ \cdot ६ \cdot ५ \cdot ४ \cdot ३ \cdot २}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५ \cdot ६ \cdot ७}$	= ८ सात सात " "
$\frac{८ \cdot ७ \cdot ६ \cdot ५ \cdot ४ \cdot ३ \cdot २ \cdot १}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५ \cdot ६ \cdot ७ \cdot ८}$	= १ आठ आठ " " हैं उत्तर.

$\frac{६}{१}$	= ६ एकेक रस घेऊन होणारे चटणीचे
$\frac{६ \cdot ५}{१ \cdot २}$	= १५ दोन दोन " " " भेद.
$\frac{६ \cdot ५ \cdot ४}{१ \cdot २ \cdot ३}$	= २० तीन तीन " " "
$\frac{६ \cdot ५ \cdot ४ \cdot ३}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४}$	= १५ चार चार " " "
$\frac{६ \cdot ५ \cdot ४ \cdot ३ \cdot २}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५}$	= ६ पांच पांच " " "
$\frac{६ \cdot ५ \cdot ४ \cdot ३ \cdot २ \cdot १}{१ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५ \cdot ६}$	= १ सहा सहा " " " हैं उत्तर.

उपपत्ति.

दिलेल्या वस्तूतून प्रत्येक वेळीं कांहीं नियत वस्तु घेऊन त्याची उलट पालट करण्यानें जे भेद होतात त्यांस विपर्यय असें म्हण-

तात. जसें अ, ब, क, ह्या तीन वस्तुपैकीं प्रत्येक वेळा दोन दोन वस्तु घेऊन अ ब, ब अ, अ क, क अ, ब क, क ब असे ६ विपर्यय होतात.

दिलेल्या वस्तूंतून प्रत्येक वेळीं कांहीं नियत वस्तु घेऊन क्रमाकडे लक्ष्य न देतां जे भेद होतात त्यांस संयोग असें म्हणतात. जसें अ, ब, क, ह्या तीन वस्तुपैकीं प्रत्येक वेळां दोन दोन वस्तु क्रमाकडे लक्ष्य न देतां घेऊन अ ब, अ क, ब क, असे तीन संयोग होतात.

येथें अ ब, आणि ब अ असें दोन विपर्यय होतात तथापि क्रमाकडे लक्ष्य न दिल्यामुळे संयोग एकच होतो.

प्रथम वस्तु विपर्यय याविषयीं नियम काढूं, कल्पना करा कीं, अ, ब, क, ड इत्यादि न वस्तूंतून प्रत्येक वेळां २ वस्तु घेऊन विपर्यय काढावयाचे आहेत; जर दोन दोन वस्तु घेऊन भेद केलें तर न (न-१) इतके विपर्यय होतील. कारण; ब, क, ड इत्यादि न वस्तूच्या मागे अ वस्तु जोडिल्यानें (न-१) इतके भेद अ आहे आरंभी ज्यांच्या असे झाले. तसेंच ब जोडिल्यानें आरंभी ज्यांच्या ब आहे असे भेद (न-१) इतके होतील. तसेंच क जोडिल्यानें (न-१) इतके होतील. असेंच पुढें केल्यानें सर्व भेद न (न-१) इतके विपर्यय दोन दोन वस्तु संबधानें होतील.

आतां तीन तीन वस्तु घेऊन विपर्यय करूं; प्रथम ब, क, ड, इत्यादि (न-१) वस्तूंचे मागील नियमाप्रमाणें दोन दोन वस्तु घेऊन (न-१) (न-२) इतके विपर्यय होतात. यांच्या मागे अ जोडिल्यानें (न-१) (न-२) इतके विपर्यय अ आरंभी आहे ज्यांच्या अशा तीन तीन वस्तुसंबधानें झाले.

तसेंच ब प्रारंभीचे (न-१) (न-२) इतके तीन तीन वस्तु संबंध धांने झाले. याचपद्धतीने पुढेही करीत गेले असतां न (न-१) (न-२) इतके विपर्यय तीन तीन वस्तुसंबंधांने होतील— या- वरून खालील नियम सहज लक्ष्यांत येईल.

न (न-१) (न-२) (न- (र-१))

ही सारणी न वस्तूंतून प्रत्येक वेळां र वस्तु घेतल्या असतां विपर्यय येण्याची झाली.

येथें न बरोबर र असेल तर वरील सारणीचे स्वरूप

न (न-१) (न-२) (न-३) २. १

असें होतें. यास न अशी खूण करितात म्हणजे १. २.

३. इत्यादि न संख्यांचा गुणाकार समजावा.

आतां र वस्तूंचा कोणताही एखादा संयोग घेऊन याचे विपर्यय केले असतां र इतके होतात.

∴ न वस्तूंतून प्रत्येक वेळां र वस्तु घेऊन त्यांचे संयोग =

न (न-१) (न-२) (न-र+१)

र

इतके होतील हें उघड आहे.

येथें न = ६ व र = १ धरून संयोग = $\frac{6}{1}$

न = ६ व र = २ धरून

संयोग = $\frac{6 \times 6}{1 \times 2}$

न = ६ व र = ३ धरून

संयोग = $\frac{6 \times 6 \times 6}{1 \times 2 \times 3}$

न = ६ व र = ६ धरून



(७८)

$$\text{संयोग} = \frac{६ \times ९ \times ४ \times ३ \times २ \times १}{१ \times २ \times ३ \times ४ \times ५ \times ६}$$

म्हणून संपूर्ण सूत्रसिद्धि झाली.

याप्रमाणें मिश्रव्यवहाराचें सोपपत्तिक भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

श्रेढीव्यवहार.

श्लोक—सैकपदघ्नपदार्धमथैकाद्यंकयुतिः किल संक-
लिताख्या ॥ साद्वियुतेन पदेन विनिघ्नी स्यात्त्रित्दता खलु
संकलितैक्यम् ॥

अर्थ—पद संख्येमध्ये एक मिळवून जी संख्या होईल तिनें
पदसंख्येच्या अर्धास गुणिलें असतां विवक्षित एकादि अंकांची
बेरीज होते. या बेरजेस संकलित असें म्हणतात.

पद संख्येमध्ये दोन मिळवून जी संख्या होईल तिनें संक-
लितास गुणून ३ या संख्येनें भागिलें असतां संकलितांची बेरीज
होते. या बेरजेस संकलितैक्य असें म्हणतात.

उदाहरणम्—एकादीनां नवांतानां पृथक्संकलितानि
ये ॥ तेषां संकलितैक्यानि प्रचक्ष्य गणकं द्रुतम् ॥

अर्थ—एकादि नवांत संख्यांचीं संकलितें पृथक् पृथक् सांग?
आणि त्यांचीं संकलितैक्येही सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

प्रथम १, २, ३, ४, ५ या संख्यांची बेरीज करूं. येथें पदसंख्या ५ यांत १ मिळवून ६ यानें पदाधास $\frac{१}{२}$ गुणून १५ हें एकादि पंचांकाचें संकलित झालें. तसेंच एकादि नवांत संख्येचें संकलित करित असता पदसंख्या ९ यांत १ मिळवून १० यानें पदाधास $\frac{१}{२}$ गुणून ४५ हें उत्तर. याप्रमाणेंच अन्य उत्तरें काढावीं.

आतां एकादिनवांत संकलितांची बेरीज करूं. येथें पदसंख्या ९ यांत २ मिळवून ११ यानें एकादिनवांत संख्यांच्या संकलितास ४५ गुणून ४९५ झाले यास ३ ने भागून १६५ हें संकलितैक्य झालें. याचप्रमाणें अन्य संकलितैक्यांचीं उत्तरें काढावींत.

उपपत्ति.

१, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९ या एकादिनवांत संख्यांची बेरीज करणें म्हणजे सर्वधन काढणें हा अर्थ होय. कारण येथें आदि १, चय (उत्तर) १ आणि पद म्हणजे गच्छ ९ आहे. व अंत्यधन ९ च आहे.

अव्यक्त पद्धतीनें श्लोकांत दिलेली रीति उत्पन्न होण्याकरितां कल्पना करा कीं,

प्रथम दिवशी दिलेलें द्रव्य	आ
दुसरे दिवशी.....	आ + उ
तिसरे.....	आ + २ उ
चवथे.....	आ + ३ उ
पांचवे.....	आ + ४ उ
न संख्याक दिवशी.....	आ + (न-१)उ
∴ अंत्यधन = आ + (न-१) उ..... (१)	
सर्वधन = आ + (आ + उ) + (आ + २ उ) +	



.....(अं - २ उ) + (अं - उ) + अं.

याच समीकरणांतील पदे उलट मांडून

$$\text{सर्वधन} = \text{अं} + (\text{अं} - उ) + (\text{अं} - २ उ) \dots\dots$$

$$\dots\dots + (\text{आ} + २ उ) + (\text{आ} + उ) + \text{आ}.$$

या दोन समीकरणांच्या बेरजेवरून

$$२ \text{ सर्वधन} = (\text{आ} + \text{अं}) + (\text{आ} + \text{अं}).. (\text{आ} + \text{अं})$$

$$\therefore २ \text{ स} = (\text{आ} + \text{अं}) \text{ गच्छ}$$

$$\therefore \text{स} = \frac{(\text{आ} + \text{अं}) \text{ गच्छ}}{२} \dots\dots\dots (२)$$

आतां संकलिताचे उदाहरणामध्ये अंयधन व गच्छ किमतीने तुल्य असल्यामुळे त्या दोघांस पद अशी संज्ञा दिली आहे; व आदि १ असतो म्हणून मागील समीकरणाचे स्वरूप

$$\text{संकलित} = (१ + \text{पद}) \frac{\text{पद}}{२} \text{ असें झाले..... (३)}$$

म्हणून इष्ट सिद्धि झाली.

आतां संकलितैक्याच्या सारणीची उपपत्ति करूं.

$$\overset{3}{n} - (\overset{3}{n} - १) = ३ \overset{3}{n} - ३ \overset{3}{n} + १$$

$$(\overset{3}{n} - १) - (\overset{3}{n} - २) = ३ (\overset{3}{n} - १) - ३ (\overset{3}{n} - १) + १$$

$$(\overset{3}{n} - २) - (\overset{3}{n} - ३) = ३ (\overset{3}{n} - २) - ३ (\overset{3}{n} - २) + १$$

$$(\overset{3}{n} - ३) - (\overset{3}{n} - ४) = ३ (\overset{3}{n} - ३) - ३ (\overset{3}{n} - ३) + १$$

$$(\overset{3}{n} - ४) - (\overset{3}{n} - ५) = ३ (\overset{3}{n} - ४) - ३ (\overset{3}{n} - ४) + १$$

.....

.....

$$\begin{aligned}
 (4)^3 - (3)^3 &= 3(4)^2 - 3(4) + 1 \\
 (3)^3 - (2)^3 &= 3(3)^2 - 3(3) + 1 \\
 (2)^3 - (1)^3 &= 3(2)^2 - 3(2) + 1 \\
 (1)^3 - (0)^3 &= 3(1)^2 - 3(1) + 1
 \end{aligned}$$

या सर्वांच्या बेरजेवरून

$$\begin{aligned}
 n^3 &= 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + n^2) \\
 &\quad - 3(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n) + n \\
 \therefore n^3 &= 3 \text{ वर्गैक्य} - 3 \text{ संकलित} + n \text{ यांत समीकरण}
 \end{aligned}$$

(३) मधील संकलिताची किंमत ठेवून

$$n^3 = 3 \text{ वर्गैक्य} - 3 \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\therefore 3 \text{ वर्गैक्य} = n^3 + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\therefore v = \frac{2n^3 + 3n^2 + 3n - 2n}{2 \times 3}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore \text{वर्गैक्य} = \frac{2n+1}{3} \times \frac{n(n+1)}{2}$$



(८२)

$$\therefore v = \frac{2n+1}{2} \times \text{संकलित} \dots\dots\dots (४)$$

$$\text{आतां संकलित} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

या सारणीवरून एकादिकांची संकलिते लिहून दाखवितो.

$$\text{संख्या १ चे संकलित} = \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\dots\dots २ चे \dots\dots = \frac{2^2}{2} + \frac{2}{2}$$

$$\dots\dots ३ चे \dots\dots = \frac{3^2}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\dots\dots ४ चे \dots\dots = \frac{4^2}{2} + \frac{4}{2}$$

$$\text{संख्या } n \text{ चे संकलित} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

या सर्वांच्या बेरजेवरून

$$\text{संकलितैक्य} = \left(\frac{1^2}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{2^2}{2} + \frac{2}{2} \right)$$

$$+ \left(\frac{3^2}{2} + \frac{3}{2} \right) \dots\dots \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \right)$$

$$\therefore \text{संकलितैक्य} = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2}{2}$$

$$+ \frac{१ + २ + ३ + \dots + n}{२}$$

$$= \frac{\text{वर्गैक्य}}{२} + \frac{\text{संकलित}}{२}$$

थांत समीकरण (४) मधील वर्गैक्याची किंमत ठेवून

$$\text{संकलितैक्य} = \frac{\frac{२n+१}{३} \text{ सं.}}{२} + \frac{\text{सं.}}{२}$$

$$= \frac{\text{सं.}}{२} \left(\frac{२n+१}{३} + १ \right)$$

$$= \frac{\text{सं.}}{२} \left(\frac{२n+४}{३} \right)$$

$$= \frac{\text{सं.}}{२} + \frac{२}{३} (n+२)$$

$$= \frac{n+२}{३} \text{ संकलित}$$

म्हणून उत्तरार्धाची इष्टसिद्धि झाली.

श्लोक—द्विघ्नपदं कुयुतं त्रिविभक्तं संकलितेन इतं
कृतियोगः ॥ संकलितस्य कृतेः सममेकाद्यंकघनैक्यमुदा-
हृतमाद्यैः ॥

अर्थ—पदसंख्येच्या दुपटीमध्ये एक मिळवून ३ ने भागावे.
नंतर आलेल्या भागाकारास संकलिताने गुणिलें असतां विवक्षित
व क्रमिक अशा एकादि संख्यांच्या वर्गांचा योग (बेरीज) होतो.



संकलिताचा वर्ग केला असतां एकादि संख्यांच्या घनांची बेरीज होते.

उदाहरणम्—तेषामेव च वर्गेक्यं घनैक्यं च वद द्रुतम् ॥ कृतिसंकलनामार्गे कुशला यदि ते मतिः ॥

अर्थ—पूर्वीच्या उदाहरणांत जे अंक सांगितले आहेत त्यांच्या वर्गांच्या व घनांच्या बेरीजा सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

एकादि नवांत संख्यांचे वर्गेक्य करावयाचे तर पदसंख्या ९ हिची दुप्पट १८ एक मिळवून १९ तिहीने भागून $\frac{19}{3}$ यास ९ चे संकलित ५५ यानें गुणून $\frac{19}{3} \times \frac{55}{3} = 2025$ हें वर्गेक्य झालें.

एकादि नवांत संख्यांचें संकलित ५५ याचा वर्ग २०२५ ही १ पासून ९ अंकांच्या घनांची बेरीज झाली. याचप्रमाणें अन्य उदाहरणें सोडवावी.

उपपत्ति.

या प्रकरणाच्या पहिल्या श्लोकाच्या उपपत्तीपैकीं समीकरण (४) वरून प्रस्तुत श्लोकांतील वर्गेक्याच्या रीतीची उपपत्ति स्पष्ट होते.

आतां घनैक्याच्या रीतीची उपपत्ति करूं.

$$\begin{aligned} 1^3 - (1^3 - 1^3) &= 1^3 - 1^3 + 1^3 - 1^3 \\ (1^3 - 1^3) - (1^3 - 2^3) &= 1^3 - 1^3 - 1^3 + 2^3 + 1^3 - 1^3 - 1^3 \\ (1^3 - 2^3) - (1^3 - 3^3) &= 1^3 - 1^3 - 1^3 + 2^3 + 1^3 - 1^3 - 1^3 + 3^3 - 1^3 \\ (1^3 - 3^3) - (1^3 - 4^3) &= 1^3 - 1^3 - 1^3 + 2^3 + 1^3 - 1^3 - 1^3 + 3^3 - 1^3 + 4^3 - 1^3 \\ (1^3 - 4^3) - (1^3 - 5^3) &= 1^3 - 1^3 - 1^3 + 2^3 + 1^3 - 1^3 - 1^3 + 3^3 - 1^3 + 4^3 - 1^3 + 5^3 - 1^3 \end{aligned}$$

$$(१)^४ - (४)^४ = ४ (१)^३ - ६ (१)^२ + ४ (१) - १$$

$$(४)^४ - (३)^४ = ४ (४)^३ - ६ (४)^२ + ४ (४) - १$$

$$(३)^४ - (२)^४ = ४ (३)^३ - ६ (३)^२ + ४ (३) - १$$

$$(२)^४ - (१)^४ = ४ (२)^३ - ६ (२)^२ + ४ (२) - १$$

$$(१)^४ - (०)^४ = ४ (१)^३ - ६ (१)^२ + ४ (१) - १$$

या सर्वांच्या बेरजेवरून.

$$\begin{aligned} \text{न} &= ४ (१^३ + २^३ + ३^३ + ४^३ + \dots + \text{न}^३) \\ &\quad - ६ (१^२ + २^२ + ३^२ + ४^२ + \dots + \text{न}^२) \\ &\quad + ४ (१ + २ + ३ + ४ + \dots + \text{न}) \\ &\quad - \text{न} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{न} = ४ \text{ घनैक्य} - ६ \text{ वर्गैक्य} + ४ \text{ संकलित} - \text{न}$$

$$\therefore ४ \text{ घ} = \text{न} + ६ \text{ व} - ४ \text{ सं} + \text{न}$$

यांत वर्गैक्याची व संकलिताची किंमत ठेवून.

$$\begin{aligned} \text{घ} &= \frac{\text{न} + ६ \left(\frac{२\text{न} + १}{३} \left(\frac{\text{न}^३}{२} + \frac{\text{न}}{२} \right) \right) - ४ \left(\frac{\text{न}^३}{२} + \frac{\text{न}}{२} \right) + \text{न}}{४} \\ &= \frac{\text{न} + ६ \left(\frac{२\text{न} + १}{६} \left(\frac{\text{न}^३}{२} + \frac{\text{न}}{२} \right) \right) - ४ \left(\frac{\text{न}^३}{२} + \frac{\text{न}}{२} \right) + \text{न}}{४} \\ &= \frac{\text{न} + २\text{न} + ३\text{न} + \frac{\text{न}}{२} + \text{न} - २\text{न} - २\text{न} + \text{न}}{४} \end{aligned}$$



(८६)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n^3 + 2n^2 + n^3}{8} \\
 &= \frac{(n^3 + 2n^2 + 1)n^3}{8} \\
 &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2
 \end{aligned}$$

∴ घनैक्य = सकलित

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

श्लोकः—व्येकपदघ्नचयो मुखयुक्स्यादंत्यधनं मुखयु-
ग्दलितं तत् ॥ मध्यधनं पदसंगुणितं तत्सर्वधनं गणितं च
तदुक्तम् ॥

अर्थ—एकोन गच्छास उत्तरानें गुणून त्यांत आदिपद
मिळवावें म्हणजे अंत्यधन येतें. आदिपदामध्ये अंत्यधन मिळ-
वून अर्ध केलें असतां मध्यधन येतें. आणि मध्यपदास गच्छानें
गुणिलें असतां सर्वधन येतें. या सर्वधनास गणित अशीही
संज्ञा आहे.

उपपत्ति.

या प्रकरणाच्या आरंभीच्या श्लोकाच्या उपपत्तीतील समी-
करण (१) वरून प्रकृत दिलेल्या अंत्यधनाच्या रीतीची उप-
पत्ति होते. समीकरण (२) वरून सर्वधनाच्या रीतीची उपपत्ति
होते. आणि $\frac{\text{आदि} + \text{अंत्य}}{२}$ यास मध्यधन अशी संज्ञाच
केली आहे कारण संज्ञा न म्हटल्यास समपदे ज्या ठिकाणीं
असतील त्या ठिकाणीं मध्यधनाचा अभाव होतो.

(८७)

उदाहरणम्—आद्ये दिने द्रम्मचतुष्टयं यो दत्त्वा द्विजे-
भ्योऽनुदिनं प्रवृत्तः ॥ दातुं सखे पंचचयेन पक्षे द्रम्मा वद
द्राकति तेन दत्ताः ॥

अर्थ—एका गृहस्थाने पहिले दिवशीं ब्राह्मणांस ४ द्रम्म
दिले, व पुढे दररोज ५ द्रम्म देऊं लागला तेव्हां १९ दिवसां-
मध्ये त्याने ब्राह्मणांस किती द्रम्म दिले तें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथें आदि ४ चय ५ व गच्छ १५ आहे. म्हणून एकोन गच्छ १४
यास उत्तर ५ नें गुणून ७० यांत आदि ४ मिलावून ७४ हें अंत्यधन
आदि ४ + अंत्यधन ७४
२ = ३९ मध्यधन

मध्यधन ३९ × गच्छ १५ = ५८५ सर्वधन हें उत्तर.

उदाहरणम्—आदिः सप्त चयः पंच गच्छोऽष्टौ यत्र
तत्र ये ॥ मध्यांत्यधनसंख्ये के वद सर्वधनं च किम् ॥

अर्थ—जर आदि ७ चय ६ गच्छ ८ आहे, तर मध्यधन,
अंत्यधन, व सर्वधन काय हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

(८ - १) ५ + ७ = ४२ अंत्यधन
 $\frac{७ + ४२}{५} = \frac{४९}{५}$ मध्यधन
 $\frac{४९}{५} \times \frac{६}{५} = ११६$ सर्वधन } हें उत्तर.

सूत्रम्—गच्छहते गणिते वदनं स्याद्व्येकपदघ्नचयार्ध-
विहीने ॥

अर्थ—सर्वधनास गच्छाने भागून जो भागाकार येईल त्यां-
तून एकोन गच्छास उत्तरानें गुणून जें अर्ध होईल तें वजा
करावें म्हणजे आदिधन येतें.

उपपत्ति.

$$\text{सर्वधन} = \frac{\text{आदि} + \text{अंत्य}}{२} \times \text{गच्छ}$$

यांत अंत्य = आ + (ग - १) उ ही किमत ठेवून

$$\text{सर्वधन} = \frac{\text{आ} + \text{आ} + (\text{ग} - १) \text{उ}}{२} \times \text{गच्छ}$$

$$\therefore \frac{\text{सर्वधन}}{\text{गच्छ}} = \frac{२ \text{आ} + (\text{ग} - १) \text{उ}}{२}$$

$$\therefore \frac{\text{स}}{\text{ग}} = \text{आ} + \frac{(\text{ग} - १) \text{उ}}{२}$$

$$\therefore \text{आदि} = \frac{\text{सर्वधन}}{\text{गच्छ}} - \frac{(\text{ग} - १) \text{उ}}{२}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

उदाहरणम्—पंचाधिकं शतं श्रेढीफलं सप्तपदं किल ॥

चयं त्रयं वयं विबो वदनं वद नंदन ॥

अर्थ—जर सर्वधन १०५ गच्छ ७ आणि चय ३ आहे तर आदि काय ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{आदि} = \frac{\text{सर्वधन}}{\text{गच्छ}} - \frac{(\text{ग} - १) \text{उ}}{२}$$

या सारणीत दिलेल्या किमती ठेवून.

(८९)

$$\text{आदि} = \frac{१०५}{७} - \frac{(७-१)३}{२}$$

∴ आदि = १५ - ९ = ६ हें उत्तर.

सूत्रम्—गच्छहतं धनमादिविहीनं व्येकपदार्धहतं च चयः स्यात् ॥

अर्थ—सर्व धनास गच्छानें भागून त्यांतून आदि वजा करावा. आणि शेषास एकोन गच्छाच्या अर्धानें भागिले असतां चयाची किंमत येते.

उपपत्ति.

गच्छहते गणिते इत्यादि सूत्रावरून.

$$\text{आदि} = \frac{\text{सर्वधन}}{\text{गच्छ}} - \frac{(ग-१)उ}{२}$$

$$\therefore \frac{(ग-१)उ}{२} = \frac{\text{सर्वधन}}{\text{गच्छ}} - \text{आ.}$$

$$\therefore उ = \frac{\frac{\text{सर्वधन}}{\text{गच्छ}} - \text{आ.}}{\frac{ग-१}{२}}$$

म्हणून इष्ट सिद्धि झाली.

उदाहरणम्—प्रथममगमदत्ता योजने योजनेशस्तदनु ननु कयाऽसौ ब्रूहि यातोऽध्ववृद्ध्या ॥ अरिकरिहरणार्थं योजनानामशीत्या रिपुनगरमवाप्तः सप्तरात्रेण धीमन् ॥

अर्थ—एक राजा शत्रूचे हत्ती निकण्याकरितां ८० योजने ७ दिवसांत चालून शत्रूच्या नगरास पोचला. तो पहिल्या

(९०)

दिवशी २ योजनें गेला तर दुसऱ्या दिवसापासून तो दररोज किती अधिक चालत गेला हें सांग ?

येथें गच्छ ७ सर्वधन ८० व आदि २ यांपासून चय काढावयाचा असा तात्पर्यार्थ झाला.

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

$$\frac{\text{स}}{\text{ग}} - \text{आ.}$$

$$उ = \frac{\text{ग} - १}{२}$$

या समीकरणामध्यें दिलेल्या किमती ठेवून.

$$उ = \frac{\frac{८०}{७} - २}{२} = \frac{८० - १४}{१४} \cdot \frac{२}{६}$$

$$\therefore उ = \frac{२३}{३} = ३\frac{१}{३} \text{ हें उत्तर.}$$

सूत्रम्—श्रेढीफलादुत्तरलोचनप्राच्यार्धवक्त्रांतरवर्ग-
युक्तात् ॥ मूलं मुखोनं चयखंडयुक्तं चयोद्धृतं गच्छमुदा-
हरन्ति ॥

अर्थ—सर्व धनास उत्तरानें गुणून दुप्पट करावी, तीमध्यें आर्दातून चयार्ध वजा करून त्याचा वर्ग मिळवावा. त्याच्या वर्गमूळातून आदि वजा करून चयार्ध मिळवावें नंतर चयानें भागिलें असतां गच्छ येतो.

उपपत्ति.

$$\text{सर्वधन} = \frac{\text{आ} + \text{अं}}{२} \cdot \text{गच्छ}$$

यांत अंत्यधनाची किंमत ठेवून

$$स = \frac{आ + आ + (ग - १) उ}{२} \cdot ग$$

$$\therefore स = \frac{२ आ + ग उ - उ}{२} \cdot ग$$

$$= \frac{२ आ. ग. + ग उ - उ ग}{२}$$

$$\therefore २ स = २ आ ग + ग उ - उ ग.$$

$$\therefore उ ग + ग (२ आ - उ) = २ स$$

उभयपक्षांस उ ने भागून

$$\frac{२ स}{उ} = ग + \frac{ग (२ आ - उ)}{उ}$$

हे वर्ग समीकरण झाले. म्हणून ग च्या गुणकाच्या निम्पटीचा वर्ग दोन्ही पक्षांत मिळवून

$$ग + \frac{ग (२ आ - उ)}{उ} + \left(\frac{२ आ - उ}{२ उ} \right)^2 = \frac{२ स}{उ} + \left(\frac{२ आ - उ}{२ उ} \right)^2$$

उभयपक्षांची वर्गमूळे काढून.

$$ग + \frac{२ आ - उ}{२ उ} = \pm \frac{\sqrt{८ स उ + (२ आ - उ)^2}}{-\sqrt{४ उ^2}}$$

$$\therefore ग = \frac{- \frac{२ आ - उ}{२ उ} \pm \sqrt{८ स उ + (२ आ - उ)^2}}{२ उ} - \frac{२ आ - उ}{२ उ}$$



$$ग = \frac{- \sqrt{२ स उ + \left(आ - \frac{उ}{२} \right)^2} - आ + \frac{उ}{२}}{उ}$$

म्हणून इष्टासिद्धि झाली.

उदाहरणम्—द्रुमत्रयं यः प्रथमेऽन्हि दत्त्वा दातुं प्रष्टुतो द्विचयेन तेन ॥ शतत्रयं षष्ठ्यधिकं द्विजेभ्यो दत्तं कियद्दिवसैर्वदाऽऽशु ॥

अर्थ—एका गृहस्थाने पहिल्या दिवशी ३ द्रुम ब्राह्मणाला देऊन पुढे प्रति दिवशी दोन दोन द्रुम अधिक या पद्धतीने ३६० द्रुम दिले तर त्याला किती दिवस लागले हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथें आदि ३ चय २ व सर्वधन ३६० यांवरून गच्छ काढावयाचा आहे.

$$गच्छ = \frac{\sqrt{२ स उ + \left(आ - \frac{उ}{२} \right)^2} - आ + \frac{उ}{२}}{उ}$$

$$गच्छ = \frac{\sqrt{२ \times ३६० \times २ + \left(३ - \frac{३}{२} \right)^2} - ३ + \frac{३}{२}}{२}$$

$$गच्छ = \frac{\sqrt{१२९० + ४} - २}{२} = १८ \text{ हें उत्तर.}$$

सूत्रम्—विषमे गच्छे व्येके गुणकः स्थाप्यः समेऽर्धिते वर्गे ॥ गच्छस्रयांतमंत्याव्यस्तं गुणवर्गजं फलं यत्तत् ॥ व्येकं व्येकगुणोद्धृतमादिगुणं स्याद्गुणोत्तरे गणितम् ॥

अर्थ—विषम गच्छ असल्यास त्यांतून १ वजा करून गुणक संज्ञा स्थापन करावी. व सम गच्छ असल्यास त्यांचे अर्ध करून वर्ग संज्ञा स्थापन करावी. पुढे वजा करून किंवा अर्ध करून आलेली संख्या विषम असल्यास १ वजा करून पूर्वी जी संज्ञा मांडली तिच्या उजवीकडे पुनः गुणक संज्ञा मांडावी; सम असल्यास अर्ध करून वर्ग संज्ञा मांडावी. अशीच क्रिया गच्छाचा क्षय होईपर्यंत करावी. अशा कृतीने गुणवर्गात्मक एक पंक्ति तयार होते. नंतर अखेरीस जी संज्ञा असेल ती प्रमाणे गुणोत्तर किंवा गुणोत्तराचा वर्ग करावा म्हणजे अखेरीस वर्गसंज्ञा असल्यास गुणोत्तराचा वर्ग करावा गुणक संज्ञा असल्यास गुणोत्तरच घ्यावे. नंतर उजवेकडून डावीकडे जी दुसरी संज्ञा असेल त्याप्रमाणे पूर्वीच्या संख्येस क्रिया करावी ही क्रिया पंक्ति समाप्तिपर्यंत करावी म्हणजे या कृतीने गुणोत्तराचा गच्छाईतका घात होतो. नंतर त्यांतून १ वजा करून आदीने गुणावे. आलेल्या गुणाकारास एकोन गुणोत्तराने मागिले असतां सर्वघन येते.

उपपत्ति.

आ = प्रथम दिवशी दिलेले द्रव्य; व र = ज्या पटीने रोज द्रव्य दिले ते गुणोत्तर.

∴ प्रथम दिवशी दिलेले द्रव्य आ

दुसऱ्या आ. र

तिसऱ्या आ. र^२

चवथ्या आ. र^३

पांचव्या आ. र^४

.....



(९४)

(ग) संख्याक दिवशीं आ r^{g-1}

$$\therefore \text{सर्वधन} = \text{आ} + \text{आ } r + \text{आ } r^2 + \text{आ } r^3 +$$

$$\text{आ } r^4 + \dots + \text{आ } r^{g-2} + \text{आ } r^{g-1}$$

उभयपक्षांस र ने गुणून

$$\text{स. र} = \text{आ } r + \text{आ } r^2 + \text{आ } r^3 + \dots + \text{आ } r^{g-1} + \text{आ } r^g$$

या समीकरणांतून वरील समीकरण वजा करून

$$\text{स र} - \text{स} = \text{आ } r^g - \text{आ} = \text{आ } (r^g - 1)$$

$$\therefore \text{स } (r - 1) = \text{आ } (r^g - 1)$$

$$\therefore \text{स} = \frac{(r^g - 1)}{(r - 1)} \cdot \text{आ}$$

$$\text{आतां } r = (2)^{39} \quad \text{थेथें विषम गच्छ आहे}$$

$$\therefore (2)^{39} = \left(\left(\left(\frac{2}{व} \times \frac{2}{गु} \right) \times \frac{2}{व} \right) \times \frac{2}{गु} \right) \times \frac{2}{व} \times \frac{2}{गु}$$

म्हणून इष्ट सूत्र सिद्ध झाली.

उदाहरणम्—पूर्व वराटकयुगं येन द्विगुणोत्तरं प्रतिज्ञा-
तम् ॥ प्रत्यहमर्थिजनाय स मासे निष्कान्ददाति कति ॥

अर्थ—एका गृहस्थानें पहिल्या दिवशीं २ कवड्या याच-
कास दिल्या. पुढें तो प्रत्येक दिवशीं दुप्पट दुप्पट देऊं लागला.
तेव्हां त्यानें एका महिन्यामध्ये किती निष्क दिले. हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथें आदि २ गुणोत्तर २ व गच्छ ३० यावरून सर्वधन काढाव-
याचें आहे.

गच्छ सम आहे म्हणून त्याचें अर्ध १५ करून वर्ग संज्ञा एका बाजूस
मांडली. पुढें १५ हें विषम आहेत म्हणून १ वजा करून १४ पूर्वीच्या
वर्ग संज्ञेच्या पुढें गुणक संज्ञा लाहिली. १४ हे सम असल्यामुळें अर्ध ७
करून वर्ग संज्ञा मांडली. ७ हे विषम आहेत म्हणून १ वजा करून ६
गुणक संज्ञा मांडली. ६ हे सम असल्यामुळें अर्ध ३ करून वर्ग संज्ञा
स्थापिली. पुढें ३ हे विषम म्हणून १ वजा करून २ गुणक संज्ञा २ चें
अर्ध १ म्हणून वर्ग संज्ञा मांडली. याप्रमाणें गुणवर्गात्मक पंक्ति तयार
शाली ती व. गु. व. गु. व. गु. व. अशी आहे. आतां या पंक्तीच्या शेव-
टच्या संज्ञेप्रमाणें गुणोत्तरास कृति करून पुढें विपरीत क्रमानें संज्ञाप्रमाणें
करीत असतां २ याचा वर्ग ४ यास २ नीं गुणून ८ याचा वर्ग ६४ यास
दोहोंनीं गुणून १२८ याचा वर्ग १६३८४ यास २ नीं गुणून ३२७६८
याचा वर्ग करून १०७३७४१८२४ हा गुणोत्तराचा गच्छादतका घात
शाला. यास १ वजा करून एकोन गुणोत्तरानें (२-१) भागून व आदि
२ यांनें गुणून सर्वधन २१४७४८३६४६ कवड्या शाल्या. व याचे निष्क
१०८५७ द्रुम्म ९ पैसे ९ दमड्या २ कवड्या ६ हें उत्तर.

उदाहरणम्—आदिद्वयं सखे वृद्धिः प्रत्यहं त्रिगुणोत्तरा॥

अच्छः सप्तदिनं यत्र गणितं तत्र किं वद ॥

**अर्थ—आदि २ गुणोत्तर ३ गच्छ ७ आहे तर सर्व-
धन काय ?**

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथें गुणोत्तर ३ याचा गच्छादतका म्हणजे ७ घात २१८७ शाला
घात १ वजा करून एकोन गुणोत्तरानें २ भागून आदी २ नीं गुणून
२१८६ सर्वधन हें उत्तर.

**सूत्रम्—पादाक्षरमितगच्छे गुणवर्गफलं चये द्विगुणे ॥
समवृत्तानां संख्या तद्गोर्गो वर्गवर्गश्च ॥ स्वस्वपदोत्तौ स्याता
मर्धसमानां च विषमाणाम् ॥**



अर्थ—ज्या वृत्ताचे चारी चरण लघुगुरुंच्या संबंधानें समान असतात अशा वृत्तास समवृत्त म्हणतात; या समवृत्ताची प्रस्तारभेदसंख्या काढण्याची रीति—

समवृत्ताच्या चरणामध्ये जितकीं अक्षरें असतील तो गच्छ व गुणोत्तर २ कल्पून २ चा गच्छाद्वयका घात केल्या असतां समवृत्ताची प्रस्तारभेदसंख्या होते.

ज्या वृत्तांतील पहिला चरण व तृतीय चरण समान असतात. व दुसरा चरण चवथ्या चरणाशीं तुल्य असतो यास अर्ध समवृत्त असें म्हणतात. या अर्ध समवृत्ताची प्रस्तार भेदसंख्या काढण्याची रीति—

समवृत्ताच्या प्रस्तार भेदसंख्येचा वर्ग करून त्यांतून समवृत्ताची प्रस्तारभेदसंख्या वजा करावी. जी बाकी राहील ती अर्ध समवृत्ताची प्रस्तारभेदसंख्या होईल.

ज्या वृत्तांतील चारी चरण असमान असतात त्यास विषमवृत्त असें म्हणतात. या विषमवृत्ताची प्रस्तार भेदसंख्या काढण्याची रीति—

समवृत्ताच्या प्रस्तार भेदसंख्येच्या चतुर्घातांतून समवृत्ताची प्रस्तार भेदसंख्या वजा केली असतां विषमवृत्ताची प्रस्तार भेदसंख्या होते.

उपपत्ति.

ल घु } २ हे दोन भेद एकाक्षर चरण
गु रु } समवृत्ताचे.

ल ल }
 गु गु } $२^३ = ४$ हे भेद द्व्यक्षर चरण समवृत्ताचे.
 ल ल }
 गु गु }

ल ल ल }
 गु ल ल }
 ल गु ल } $२^३ = ८$ हे भेद त्र्यक्षर चरण समवृत्ताचे.
 गु गु ल }
 ल ल गु }
 गु ल गु }
 ल गु गु }
 गु गु गु }

मागील पद्धतीने } $२^४ = १६$ भेद चतुरक्षर समवृत्ताचे

$२^n = n$ संख्याकाक्षर चरण समवृत्ताचे भेद.

म्हणून समवृत्तभेदाच्या रीतीची सिद्धि झाली.

आतां न संख्याकाक्षरचरणसमवृत्ताचे भेद दोन ठिकाणीं मांडून त्यांतील एका पंक्तीपैकीं एकेक भेद घेऊन तो दुसऱ्या पंक्तींतील तत्समान एक भेद सोडून देऊन बाकीच्या सर्व भेदांस जोडिलें असतां अर्धसमवृत्ताचे भेद होतील. जसें.

प्रथमपंक्ति.

द्वितीयपंक्ति.

ल ल ल

ल ल ल

ग ल ल

ग ल ल

ल ग ल

ल ग ल

ग ग ल ग ग ल
 ल ल ग ल ल ग
 ग ल ग ग ल ग

२न

२न

प्रथमपंक्तीतील (ल ल ल....) टाकून देऊन बाकी सर्व भेदांस द्वितीय पंक्तीतील (ल ल ल....) जोडले तर (२न - १) इतके भेद अर्धसमाचे होतील तसेच द्वितीयपंक्तीतील दुसरा भेद जो (ग ल ल....) हा प्रथमपंक्तीतील तत्समान (ग ल ल....) टाकून देऊन बाकीच्या सर्वांस जोडला असता त्याचे भेद (२न - १) इतके होतात. व असेच प्रत्येक जोडल्याने भेद २न इतके होतील म्हणून

२न (२न - १) = अर्ध समवृत्तभेद.

∴ (२न) - २न = अर्धसमभेद.

म्हणून अर्धसमवृत्ताच्या भेदाच्या रीतीची उपपत्ति झाली.
 आतां कांहीं समवृत्त चरण मांडूं

ल ल ल	ल ल ल	ल ल ल	ल ल ल
ल ल गु	ल ल गु	ल ल गु	ल ल गु
ग ल ल	ग ल ल	ग ल ल	ग ल ल
ग ल ग	ग ल ग	ग ल ग	ग ल ग
ल ग ल	ल ग ल	ल ग ल	ल ग ल

२न

२न

२न

२न

प्रथमपंक्तीतील भेदांस द्वितीयपंक्तीतील प्रत्येक भेद क्रमानें जोडला असतां $(2^n)^2$ इतके भेद होतात. तसेंच तिसऱ्या व चवथ्या पंक्तीतील भेद $(2^n)^2$ होतील. आतां या भेदाच्या पंक्ति मांडून दाखवितों.

प्रथमपंक्ति	द्वितीयपंक्ति
ल ल ल ल ल ल	ल ल ल ल ल ल
ल ल गु ल ल गु	ल ल गु ल ल गु
ग ल ल ग ल ल	ग ल ल ग ल ल
ग ल ग ग ल ग	ग ल ग ग ल ग
ल ग ल ल ग ल	ल ग ल ल ग ल
.....

$(2^n)^2$

$(2^n)^2$

आतां प्रथम पंक्तीतील भेद द्वितीय पंक्तीतील स्वसमान भेद टाकून बाकी सर्व भेदास जोडले असतां प्रत्येकाच्या संबंधानें सर्व भेद $((2^n)^2 - 1) \times (2^n)^2$ इतके होतील.

$$\therefore \text{विषमवृत्तभेद} = ((2^n)^2 - 1) \times (2^n)^2$$

$$= (2^n)^4 - (2^n)^2$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

उदाहरणम्—समानामर्धतुल्यानां विषमाणां पृथक्पृथक् ॥
वृत्तानां वद मे संख्यामनुष्टुप्छन्दसि वृत्तम् ॥

अर्थ—समवृत्त, अर्धसमवृत्त, आणि विषममृत्त यांच्या



(१००)

विस्तारभेद संख्या, अनुष्टुप्छन्द संबंधाने म्हणजे ८ अक्षरे वृत्त चरणांतील धरून लवकर सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथे चरणांत ८ अक्षरे आहेत म्हणून २ चा अष्टघात २५६ समवृत्तसंख्या हें उत्तर.

समवृत्तसंख्या २५६ हिचा वर्ग ६५५३६ - २५६ = ६५२८० अर्ध-समवृत्तसंख्या हें उत्तर.

समवृत्तसंख्या २५६ हिचा चतुर्घात ४२९४९६७२९६ - ६५५३६ = ४२९४९०१७६० विषमवृत्तसंख्या हें उत्तर.

या प्रमाणे श्रेढीव्यवहाराचें सोपपत्तिक भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु ॥

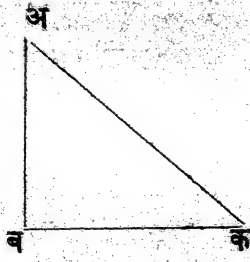
क्षेत्रव्यवहार प्रकरण.

श्लोक—इष्टो बाहुयः स्यात्तत्स्यर्धिन्यां दिशीतरो बाहुः ॥
ज्यसे चतुरसे वा सा कोटिः कीर्तिता तज्ज्ञैः ॥

अर्थ—काटकोन त्रिकोणामध्ये परस्परांस लंबरूप असणाऱ्या ज्या दोन रेषा त्यांपैकी एका रेषेस भुज असें म्हणतात; व दुसऱ्या रेषेस कोटि असें म्हणतात; आणि तिसऱ्या रेषेस कर्ण असें म्हणतात.

जसे अ व क, ह्या काटकोन त्रिकोणामध्ये अ व, आणि व क, ह्या परस्परांस लंबरूप आहेत; म्हणून अ व, हा भुज; व क, ही कोटि; आणि अ क, हा कर्ण होय.

क्षेत्रदर्शन.

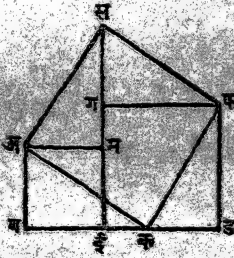


श्लोक—तत्कृत्योर्योगपदं कर्णो दोःकर्णवर्गयोर्विवरात् ॥
मूलं कोटिः कोटिश्रुतिकृत्योरंतरात्पदं बाहुः ॥

अर्थ—काटकोन त्रिकोणामध्ये भुजाच्या वर्गामध्ये कोटीचा वर्ग मिळवून जी संख्या होईल, तिचे वर्गमूळ काढिले असता कर्णाची किंमत येते.

कर्णाच्या वर्गातून भुजाचा वर्ग वजा करून बाकीचे वर्गमूळ काढिले असता कोटीची किंमत येते. आणि कर्णाच्या वर्गातून कोटीचा वर्ग वजा करून बाकीचे वर्गमूळ काढिले असता भुजाची किंमत येते.

उपपत्ति.



प्रथम अ ब क, हा एक काटकोन त्रिकोण द्या; त्यां-



तील अ व, ह्या भुजावर अ व इ म, चौरस काढा. नंतर व क, बाजू वाढवून तीमध्ये ड, हा बिंदु असा घ्या की, व क, बरोबर इ ड, होईल; आणि इ ड, ह्या रेषेवर इ ड फ ग, हा चौरस काढा; नंतर इ ग, रेषा वाढवून तीमध्ये स, हा बिंदु असा घ्या की; इ ग, बरोबर म स, होईल. नंतर अ स फ क, हे बिंदु सांधा.

आतां अ स फ क, हा अ क, बाजूवरील चौरस होईल व त्या चौरसाबरोबर अ व, बाजूवरील चौरस व व क, बाजूवरील चौरस होईल.

कारण अ व क, ह्या त्रिकोणाची अ व, बाजू, व क, बाजू आणि अ व क, हा कोन हे क्रमानें, अ म स, ह्या त्रिकोणाची अ म, बाजू; म स, बाजू आणि अ म स, हा कोन ह्या बरोबर आहेत; म्हणून रेषागणिताच्या पहिल्या अध्यायांतील चवथ्या सिद्धांताप्रमाणें अ व क, आणि अ म स, हे दोन्ही त्रिकोण एकरूप आहेत म्हणून व अ क, हा कोन म अ स, ह्या कोनाबरोबर आहे; ह्या दोहोंमध्ये क अ म, हा कोन मिळविला असतां व अ म, कोन क अ स, कोनाबरोबर होईल. परंतु व अ म, हा कोन काटकोन आहे म्हणून क अ स, हा कोन काटकोन झाला. याच पद्धतीनें क ड फ, आणि स ग फ, हे दोन्ही त्रिकोण एकरूप आहेत व स फ क, हा कोन काटकोन आहे असें दाखवितां येईल म्हणून अ क, अ स, स फ, आणि फ क, ह्या चारी बाजू समान आहेत आणि अ स, फ क, हे चारी कोन काटकोन आहेत; करितां अ क, ह्या बाजूवरील अ स फ क, हा चौरस झाला व ह्या चौरसाबरोबर, अ व, बाजूवरील अ व इ म, हा चौरस आणि इ ड, बाजू वरील (व क, बाजूवरील) चौरस इ ड फ ग, हे झाले म्हणून

$$\text{भुज}^2 + \text{कोटि}^2 = \text{कर्ण}^2 \dots \dots \dots (१)$$

असें समीकरण तयार झालें. या समीकरणाच्या उभयपक्षांची वर्गमूले काढून.

$$\text{कर्ण} = \sqrt{\text{भुज}^2 + \text{कोटि}^2}$$

समीकरण (१) पासून

$$\text{भुज}^2 = \text{कर्ण}^2 - \text{कोटि}^2$$

$$\therefore \text{भुज} = \sqrt{\text{कर्ण}^2 - \text{कोटि}^2}$$

$$\text{आणि कोटि}^2 = \text{कर्ण}^2 - \text{भुज}^2$$

$$\therefore \text{कोटि} = \sqrt{\text{कर्ण}^2 - \text{भुज}^2}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

श्लोक—राश्योरंतरवर्गेण द्विघ्ने घाते युते तयोः ॥
वर्गयोगो भवेदेवं तयोर्योगांतरा इतिः ॥ वर्गांतरं भवेदेवं
ज्ञेयं सर्वत्र धीमता ॥

अर्थ—दोन राशींच्या अंतराच्या वर्गामध्ये त्याच दोन राशींच्या गुणाकाराची दुप्पट मिळवून जी संख्या होईल ती त्याच दोन राशींच्या वर्गांच्या बेरजेबरोबर असते.

दोन राशींच्या बेरजेस त्याच दोन राशींच्या अंतरानें गुणून जो गुणाकार येईल, तो त्याच दोन राशींच्या वर्गांच्या अंतराबरोबर असतो.

उपपत्ति.

अ = प्रथम राशि व

ब = द्वितीय राशि धरून



(१०४)

$$(अ - ब)^2 = अ^2 - २ अ ब + ब^2$$

उभयपक्षांमध्ये २ अ ब मिळवून

$$(अ - ब)^2 + २ अ ब = अ^2 + ब^2 \text{ आणि}$$

$$(अ + ब) (अ - ब) = अ^2 - ब^2$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

उदाहरणम्—कोटिश्रुतुष्टयं यत्र दोस्त्रयं तत्र का भुतिः॥
कोटिं दोष्कर्णतः कोटिश्रुतिभ्यां च भुजं वद ॥

अर्थ—ज्या काटकोण त्रिकोणाची कोटि ४ व भुज ३ आहे त्या त्रिकोणांतील कर्णाची किंमत काय आहे हें सांग ?

ज्या काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण ५ व भुज ३ आहे त्या त्रिकोणांतील कोटीची किंमत काय आहे हें सांग ? आणि ज्या काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण ५ व कोटि ४ आहे त्यांतील भुजाची किंमत काय हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

$$भुज^2 + कोटि^2 = कर्ण^2$$

या सारणीमध्ये पहिल्या उदाहरणामध्ये दिलेल्या किंमती ठेवून

$$(३)^2 + (४)^2 = कर्ण^2$$

$$\therefore कर्ण^2 = ९ + १६ = २५$$

$$\therefore कर्ण = ५ \text{ हें उत्तर.}$$

$$आतां कोटि = \sqrt{कर्ण^2 - भुज^2}$$

या सारणीमध्ये दुसऱ्या उदाहरणांत दिलेल्या किंमती ठेवून

$$कोटि = \sqrt{(५)^2 - (३)^2}$$

$$\therefore कोटि = ४ \text{ हें उत्तर.}$$

$$\text{आणि भुज} = \sqrt{\text{कर्ण}^2 - \text{कोटि}^2}$$

या सारणीमध्ये तिसऱ्या उदाहरणांत दिलेल्या किंमती ठेवून

$$\text{भुज} = 3 \text{ हे उत्तर.}$$

उदाहरणम्—सांघ्रित्रयमितो बाहुर्यत्र कोटिश्च ताव-
ती ॥ तत्र कर्णप्रमाणं किं गणक ब्रूहि मे द्रुतम् ॥

अर्थ—ज्या काटकोन त्रिकोणाचा भुज $3\frac{1}{2}$ व कोटि $3\frac{1}{2}$ आहे तेथे कर्णमान सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{कर्ण} = \sqrt{\text{भुज}^2 + \text{कोटि}^2}$$

या सारणीमध्ये उदाहरणांत दिलेल्या किंमती ठेऊन

$$\text{कर्ण} = \sqrt{(3\frac{1}{2})^2 + (3\frac{1}{2})^2}$$

$$= \sqrt{12\frac{1}{2}} \text{ हे उत्तर.}$$

श्लोक—वर्गेण महतेष्टेन हताच्छेदांशयोर्वधात् ॥ पदं
गुणपदक्षुण्णच्छिद्रक्तं निकटं भवेत् ॥

अर्थ—या श्लोकामध्ये करणीगत संख्येचे आसन्नमूल (सुमाराचे बरोबर) काढण्याची रीति दिली आहे ती अशी.

करणीमध्ये असणाऱ्या अंश छेदांच्या गुणाकारास, ज्याचे बरोबर वर्गमूल निघे अशा एखाद्यामहाइष्टाने गुणावे. नंतर आलेल्या गुणाकाराचे वर्गमूल काढून त्यास छेदाने व महाइष्टाच्या वर्गमूळाने भागावे. म्हणजे आसन्नमूल येईल. जसे मागील उदाहरणांत कर्णाची किंमत $\sqrt{12\frac{1}{2}}$ ही आली आहे. हिचे आसन्नमूल काढणे आहे. करितां अंश १६९ व छेद ८ ह्यांचा गुणाकार १३१२ झाला, यास महाइष्ट १०००० याने



(१०१)

गुणून गुणाकार १३५२०००० आला याचें आसन्न वर्गमूळ ३६७७ आलें. यास छेद ८ व महाइष्टाचें वर्गमूळ १०० यांनी भागून $४\frac{४}{७}\%$ हें $\sqrt{\frac{१६९}{४}}$ ह्याचें आसन्नमूळ झालें.

उपपत्ति.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{अ}{ब}} &= \sqrt{\frac{अ}{ब} \times \frac{ब}{ब} \times \frac{महाइष्ट}{महाइष्ट}} \\ &= \sqrt{\frac{अ \times ब \times महाइष्ट}{ब^2 \times महाइष्ट}} \\ &= \frac{\sqrt{अ \times ब \times महाइष्ट}}{ब \times \sqrt{महाइष्ट}} \\ &= \frac{\sqrt{अंश \times छेद \times महाइष्ट}}{ब \times \sqrt{महाइष्ट}} \end{aligned}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

श्लोक—इष्टो भुजोऽस्माद्विगुणेष्टनिघ्नादिष्टस्य कृत्यैक-
वियुक्तयाऽऽत्यम् ॥ कोटिः पृथक्सेष्टगुणा भुजोना कर्णो
भवेन्नयस्त्वमिदं हि जात्यम् ॥ इष्टो भुजस्तत्कृतिरिष्टभक्ता
द्विःस्थापितेष्टोनयुतार्थिता वा ॥ तौ कोटिकर्णाविति को-
दितो वा बाहुश्रुती चाकरणीगते स्तः ॥

अर्थ—ज्या काटकोन त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू करणी स्वरूप
नाहींत ह्याणजे अखंड आहेत अशा त्रिकोणास जात्यव्यस्र ह्याण-
तात. अशा जात्यव्यस्रातील भुज दिला असतां कोटि व कर्ण
काढण्याची रीति या श्लोकांत दिली आहे ती अशी—

पहिली रीति—प्रथम इष्टसंख्या धरून तिच्या दुपटीनें भुजास गुणावें जो गुणाकार येईल त्यास, इष्टसंख्येच्या वर्गांतून एक वजा करून जी बाकी राहील तिनें भागावें. आलेला भागाकार कोटि होईल. आणि कोटीला इष्टसंख्येनें गुणून भुज वजा केला असतां कर्णाची किंमत येईल.

दुसरी रीति—दिलेल्या भुजाचा वर्ग करून इष्टसंख्येनें भागावें जो भागाकार येईल तो दोन ठिकाणीं मांडून एका ठिकाणीं इष्टसंख्या वजा करावी व दुसऱ्या ठिकाणीं इष्टसंख्या मिळवावी नंतर त्यांचीं अर्धे केलीं असतां क्रमानें कोटि व कर्ण यांच्या किंमती येतात. याचप्रमाणें कोटीवरून भुज व कर्ण अकरणीगत काढितां येतात.

उदाहरणम्—भुजे द्वादशके यौ यौ कोटिकर्णावने-
कधा ॥ प्रकाराभ्यां वद क्षिप्रं तौ तावकरणीगतौ ॥

अर्थ—ज्या काटकोन त्रिकोणाचा भुज १२ आहे त्याचे अकरणीगत अशी कोटि व कर्ण सांगितलेल्या दोही रीतींनीं अनेक आणून सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया

पहिल्या रीतीनें.

इष्टसंख्या २ धरून तिची दुप्पट ४ झाली; हिनें भुज १२ हास गुणून ४८ गुणाकार आला. यास इष्ट २ चा वर्ग ४ बांतून १ वजा करून संख्या ३ आली हिनें भागून भागाकार १६ आला म्हणून

कोटि = १६ हें उत्तर,

आणि कर्ण = $१६ \times २ = ३२$

∴ कर्ण = २० हें उत्तर.

अथवा इष्टसंख्या ३ धरून



(१०८)

$$\text{कोटि} = \frac{२ \times ३ \times १२}{(३)^२ - १}$$

∴ कोटि = ९ हैं उत्तर, आणि कर्ण = ९ × ३ - १२

∴ कर्ण = १५ हैं उत्तर.

याप्रमाणें इष्टसंख्या अनेक धरून उत्तरें अनेक येतील;

आतां दुसऱ्या रीतीने उत्तरें काढूं,

इष्टसंख्या २ धरून

$$\text{कोटि} = \frac{\frac{(१२)^२ - २}{२}}{२}$$

$$= \frac{\frac{१४४ - २}{२}}{२}$$

$$= \frac{७२ - २}{२} = ३५ \text{ हैं उत्तर.}$$

$$\text{कर्ण} = \frac{\frac{१४४}{२} + २}{२} = ३७ \text{ हैं उत्तर.}$$

अथवा इष्टसंख्या ४ धरून

$$\text{कोटि} = १६$$

$$\text{कर्ण} = २०$$

याप्रमाणें इष्टसंख्या अनेक धरून अनेक उत्तरें, येतील.

उपपत्ति.

कर्ण

कोटि

भुज

$$क्ष^२ + य^२$$

$$२ क्ष य$$

$$क्ष^२ - य^२$$

असें अकरणीगत कल्पून प्रत्येकास $क्ष^२ - य^२$ या संख्येनें मागिले असतां परस्परांमध्ये जें प्रमाण आहे तें बदलणार नाही करितां

(१०९)

कर्ण	कोटि	भुज
$\frac{क्ष^2 + य^2}{क्ष^2 - य^2}$	$\frac{२ क्ष य}{क्ष^2 - य^2}$	१

अशा किमती आल्या.

आतां कर्ण व कोटि यांच्या अंशच्छेदांस ये ने भागून

कर्ण	कोटि	भुज
$\frac{क्ष^2}{य} + १$	$\frac{२ क्ष}{य}$	१
$\frac{क्ष^2}{य} - १$	$\frac{क्ष^2}{य} - १$	

यांतील प्रत्येकास (अ) ने गुणिले असतां परस्परांतील प्रमाण बदलणार नाहीं करितां

कर्ण	कोटि	भुज
$\left(\frac{क्ष^2}{य} + १ \right) अ$	$\frac{२ क्ष. अ}{य}$	अ
$\frac{क्ष^2}{य} - १$	$\frac{क्ष^2}{य} - १$	

येथे $\frac{क्ष}{य} = इष्ट संज्ञा देऊन$

कर्ण	कोटि	भुज
$\frac{(इष्ट^2 + १) अ}{इष्ट^2 - १}$	$\frac{२ इष्ट. अ}{इष्ट^2 - १}$	अ

∴ भुज = अ आहे तर

(११०)

$$\text{कोटि} = \frac{२ \text{ इष्ट. भुज}}{\text{इष्ट}^३ - १} \dots\dots\dots (१)$$

$$\text{आणि कर्ण} = \frac{(\text{इष्ट}^३ + १) \text{ भुज}}{\text{इष्ट}^३ - १}$$

$$\therefore \text{कर्ण} = \frac{\text{इष्ट}^३. \text{भुज} + \text{भुज}}{\text{इष्ट}^३ - १}$$

$$= \frac{२ \text{ इष्ट}^३. \text{भुज} - \text{इष्ट}^३. \text{भुज} + \text{भुज}}{\text{इष्ट}^३ - १}$$

$$= \frac{२ \text{ इष्ट. भुज}}{\text{इष्ट}^३ - १} \times \text{इष्ट} - \frac{\text{भुज} (\text{इष्ट}^३ - १)}{\text{इष्ट}^३ - १}$$

$$= \frac{२ \text{ इष्ट. भुज}}{\text{इष्ट}^३ - १} \cdot \text{इष्ट} - \text{भुज}$$

यांतील पहिले पदाच्या गुणकाची किंमत समीकरण (१) मध्ये आहे म्हणून

$$\text{कर्ण} = \text{कोटि} \times \text{इष्ट} - \text{भुज} \dots\dots\dots (२)$$

म्हणून समीकरण (१) व (२) यांवरून इष्ट सिद्ध झाली.

आतां श्लोकांत जी दुसरी रीति दिली आहे, तिची उपपत्ति देऊं.

कर्ण	कोटि	भुज
$\text{क्ष}^२ + \text{य}^२$	२ क्ष य	$\text{क्ष}^२ - \text{य}^२$

असे अकरणीगत कल्पून प्रत्येकास २ य ह्या संख्येनें भागिलें असतां परस्परांमध्ये असणारें प्रमाण बदलणार नाहीं

(१११)

$$\therefore \begin{array}{ccc} \text{कर्ण} & \text{कोटि} & \text{भुज} \\ \frac{\text{क्ष}^2 + \text{य}^2}{२ \text{ य}} & \text{क्ष} & \frac{\text{क्ष}^2 - \text{य}^2}{२ \text{ य}} \end{array}$$

कर्ण व भुज यांच्या अंशच्छेदांस (य) ने भागून

$$\begin{array}{ccc} \text{कर्ण} & \text{कोटि} & \text{भुज} \\ \frac{\text{क्ष}^2}{\text{य}} + \text{य} & \text{क्ष} & \frac{\text{क्ष}^2}{\text{य}} - \text{य} \\ \hline २ & & २ \end{array}$$

आतां भुज व कोटि यांमध्ये स्वरूप भेद नसल्यामुळे मुजास कोटि व कोटीस भुज अशीं नावे देऊन आणि य = इष्ट संख्या धरून

$$\begin{array}{ccc} \text{कर्ण} & \text{भुज} & \text{कोटि} \\ \frac{\text{क्ष}^2}{\text{इष्ट}} + \text{इष्ट} & \text{क्ष} & \frac{\text{क्ष}^2}{\text{इष्ट}} - \text{इष्ट} \\ \hline २ & & २ \end{array}$$

म्हणून भुज = क्ष आहे तर

$$\text{कर्ण} = \frac{\frac{\text{भुज}^2}{\text{इष्ट}} + \text{इष्ट}}{२}$$

$$\text{आणि कोटि} = \frac{\frac{\text{भुज}^2}{\text{इष्ट}} - \text{इष्ट}}{२}$$

∴ इष्टसिद्धि झाली.

श्लोक—इष्टेन निघ्नाद्विगुणाच्च कर्णादिष्टस्य कृत्येक-
युजा यदाप्तं ॥ कोटिर्भवेत्सा पृथगिष्टनिघ्नी तत्कर्णयो-
रन्तरमत्र बाहुः ॥

अर्थ—या श्लोकामध्ये जात्यव्यवस्थांतील कर्ण दिल्या असतां भुज व कोटि काढण्याची रीति दिली आहे ती अशी—

प्रथम इष्टसंख्या घेऊन तिने कर्णाच्या दुप्पटीस गुणावे, आणि जो गुणाकार येईल त्यास, इष्ट संख्येच्या वर्गामध्ये एक मिळवून जी संख्या होईल तिने भागिले असतां कोटीची किंमत येते. आणि कोटीस इष्टसंख्येने गुणून जी संख्या येईल ती व कर्ण यांचे अंतर केले असतां भुजाची किंमत येते.

उदाहरणम्—पंचाशीतिमिते कर्णे यौ यावकरणी-
गतौ ॥ स्यातां कोटिभूजौ तौ तौ वद कोविद सत्वरम् ॥

अर्थ—ज्या काटकोन त्रिकोणांतील कर्ण ८५ आहे त्या त्रिकोणांतील अकरणीगत असे कोटि व भुज अनेक सांग ?

उत्तरमिष्काशनक्रिया.

इष्टसंख्या २ घेऊन

$$\text{कोटि} = \frac{८५ \times २ \times २}{(२)^२ + १}$$

$$\text{कोटि} = ६८ \text{ हे उत्तर.}$$

$$\text{आणि भुज} = २ \times ६८ - ८५$$

$$\text{भुज} = ५१ \text{ हे उत्तर}$$

अथवा इष्टसंख्या ४ घेऊन

$$\left. \begin{array}{l} \text{कोटि} = ७५ \\ \text{भुज} = ४० \end{array} \right\} \text{ हे उत्तर}$$

याप्रमाणे इष्टसंख्या अनेक घेऊन अनेक उत्तरे येतील,

(११३)

उपपत्ति.

कर्ण	कोटि	भुज
$\frac{क्ष^2 + य^2}{क्ष}$	$\frac{२ क्ष य}{क्ष^2 + य^2}$	$\frac{क्ष^2 - य^2}{क्ष^2 + य^2}$

असे अकरणीगत कल्पून प्रत्येकास $\frac{क्ष^2 + य^2}{क्ष}$ या संख्येने भागिले असतां परस्परांतील प्रमाण बदलणार नाही करितां

कर्ण	कोटि	भुज
१	$\frac{२ क्ष य}{क्ष^2 + य^2}$	$\frac{क्ष^2 - य^2}{क्ष^2 + य^2}$

यांतील कोटि व भुज यांच्या अंशच्छेदांस $\frac{क्ष^2}{क्ष^2 + य^2}$ ने भागून

कर्ण	कोटि	भुज
१	$\frac{२ य}{क्ष}$	$\frac{१ - \frac{य^2}{क्ष^2}}{१ + \frac{य^2}{क्ष^2}}$
	$\frac{२ य}{क्ष}$	$\frac{१ - \frac{य^2}{क्ष^2}}{१ + \frac{य^2}{क्ष^2}}$

प्रत्येकास अ ने गुणून आणि

$$\frac{य}{क्ष} = इष्ट धरून$$

कर्ण	कोटि	भुज
अ	$\frac{२ अ. इष्ट}{१ + इष्ट^2}$	$\frac{(१ - इष्ट^2) अ}{१ + इष्ट^2}$

∴ कर्ण = अ आहे तर

$$\text{कोटि} = \frac{२ \text{ कर्ण. इष्ट}}{१ + इष्ट^2} \dots\dots\dots (१)$$

(११४)

$$\text{आणि भुज} = \frac{(१ - इष्ट^२) \cdot \text{कर्ण}}{१ + इष्ट^२}$$

$$\therefore \text{भुज} = \frac{\text{कर्ण} - इष्ट^२ \cdot \text{कर्ण}}{१ + इष्ट^२}$$

$$= \frac{\text{कर्ण} + इष्ट^२ \cdot \text{कर्ण} - २ इष्ट^२ \cdot \text{कर्ण}}{१ + इष्ट^२}$$

$$= \frac{\text{कर्ण} + इष्ट^२ \cdot \text{कर्ण}}{१ + इष्ट^२} - \frac{२ इष्ट^२ \cdot \text{कर्ण}}{१ + इष्ट^२}$$

$$= \frac{\text{कर्ण} (१ + इष्ट^२)}{१ + इष्ट^२} - \frac{२ इष्ट^२ \cdot \text{कर्ण}}{१ + इष्ट^२}$$

$$= \text{कर्ण} - \frac{२ इष्ट^२ \cdot \text{कर्ण}}{१ + इष्ट^२}$$

$$= \text{कर्ण} - \frac{२ \text{कर्ण} \cdot इष्ट}{१ + इष्ट^२} इष्ट$$

यांतील दुसऱ्या पदाचा गुणक हा, समीकरण (१) मधील कोटीच्या किमतीबरोबर आहे म्हणून

$$\text{भुज} = \text{कर्ण} - \text{कोटि} \cdot इष्ट \dots\dots\dots (२)$$

म्हणून (१) व (२) यांवरून

इष्टसिद्धि झाली.

श्लोक—इष्टवर्गेण सैकेन द्वित्रः कर्णोऽथवा हतः ॥
फलोनः श्रवणः कोटिः फलमिष्टगुणं भुजः ॥

अर्थ — समीकरण स्वरूपानें देतों.

$$\frac{२ \text{ कर्ण}}{\text{इष्ट}^२ + १} = \text{फल}$$

$$\text{कोटि} = \text{कर्ण} - \text{फल}$$

$$\text{भुज} = \text{फल} \times \text{इष्ट}$$

उपपत्ति.

कर्ण	भुज	कोटि
$\text{क्ष}^२ + \text{य}^२$	२ क्ष य	$\text{क्ष}^२ - \text{य}^२$

असे अकरणीगत कर्णादि कल्पून प्रत्येकास $\text{क्ष}^२ + \text{य}^२$ यांनें भागिलें असतां परस्परांतील प्रमाण बदलणार नाहीं करितां

कर्ण	भुज	कोटि
१	$\frac{२ \text{ क्ष य}}{\text{क्ष}^२ + \text{य}^२}$	$\frac{\text{क्ष}^२ - \text{य}^२}{\text{क्ष}^२ + \text{य}^२}$

येथें भुज व कोटि यांच्या अंशच्छेदांस ये नें भागून

कर्ण	भुज	कोटि
१	$\frac{२ \text{ क्ष}}{\text{य}}$	$\frac{\text{क्ष}^२}{\text{य}^२} - १$
	$\frac{\text{क्ष}^२}{\text{य}^२} + १$	$\frac{\text{क्ष}^२}{\text{य}^२} + १$

प्रत्येकास अने गुणून व $\frac{\text{क्ष}}{\text{य}} = \text{इष्ट}$ धरून

कर्ण	भुज	कोटि
अ	$\frac{२ \text{ अ. इष्ट}}{\text{इष्ट}^२ + १}$	$\frac{(\text{इष्ट}^२ - १) \text{ अ}}{\text{इष्ट}^२ + १}$



(११६)

आतां कर्ण = अ आहे आणि

$$\frac{२ अ}{इष्ट^२ + १} = \text{फल संज्ञा दिली तर}$$

$$\text{भुज} = \text{फल} \times \text{इष्ट} \dots \dots \dots (१)$$

$$\text{आणि कोटि} = \frac{(इष्ट^२ - १) कर्ण}{इष्ट^२ + १}$$

$$\therefore \text{कोटि} = \frac{इष्ट^२ कर्ण - कर्ण}{इष्ट^२ + १}$$

$$= \frac{इष्ट^२ कर्ण + कर्ण - २ कर्ण}{इष्ट^२ + १}$$

$$= \frac{कर्ण (इष्ट^२ + १)}{इष्ट^२ + १} - \frac{२ कर्ण}{इष्ट^२ + १}$$

$$= \text{कर्ण} - \frac{२ कर्ण}{इष्ट^२ + १}$$

$$= \text{कर्ण} - \text{फल} \dots \dots \dots (२)$$

म्हणून समीकरण (१) व (२) यांपासून इष्टसिद्धि झाली.

श्लोक—इष्टयोराहतिर्द्विघ्नि कोटिर्बर्गीतरं भुजः ॥ कृति-
योगस्तयोरेव कर्णश्चाकरणीगतः ॥

अर्थ—ज्यांच्या योगानें जात्यव्यस्र तयार होईल असे भुज
कोटि व कर्ण काढावयाची रीति देऊं.

दोन इष्टसंख्यांच्या गुणाकाराची दुप्पट केली असतां कोटि
येते. त्याच दोन इष्टसंख्यांच्या वर्गांचें अंतर केलें असतां भुज

येतो. आणि त्याच दोन इष्टसंख्यांच्या वर्गांची बेरीज केली असतां अकरणीगत असा कर्ण येतो.

उदाहरणम्—यैर्यैह्यस्त्रं भवेज्जात्यं कोटिदोःश्रवणैः सखे ॥ त्रीनप्यविदितांस्तांस्तान्ब्रूहि क्षिप्रं विचक्षण ॥

अर्थ—ज्यांच्या योगानें जात्यव्यस्र तयार होईल असे अज्ञात भुज कोटि व कर्ण हे सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया

प्रथम इष्ट २ व १ अशा संख्या धरून,

$$\left. \begin{aligned} \text{कोटि} &= २ \times २ \times १ = ४ \\ \text{भुज} &= (२)^२ - (१)^२ = ३ \\ \text{कर्ण} &= (२)^२ + (१)^२ = ५ \end{aligned} \right\} \text{हैं उत्तर.}$$

इष्ट २ व ३ धरून,

$$\left. \begin{aligned} \text{कोटि} &= २ \times २ \times ३ = १२ \\ \text{भुज} &= (३)^२ - (२)^२ = ५ \\ \text{कर्ण} &= (३)^२ + (२)^२ = १३ \end{aligned} \right\} \text{हैं उत्तर.}$$

प्राप्तमाणें अनेक उत्तरें घेतील,

उपपत्ति.

$$\text{कोटि}^२ = ४ \text{ क्ष यं}$$

$$\text{भुज}^२ = \text{क्ष} - २ \text{ क्ष यं} + \text{यं}$$

अशी कल्पना करून

$$\text{कर्ण}^२ = \text{क्ष} + २ \text{ क्ष यं} + \text{यं}$$

$$\therefore \text{कर्ण} = \text{क्ष} + \text{यं}$$

$$\text{भुज} = \text{क्ष} - \text{यं}$$

$$\text{कोटि} = २ \text{ क्ष यं}$$



येथें क्ष आणि य ह्या दोनी इष्ट संख्या आहेत म्हणून इष्ट सिद्धि झाली.

श्लोक—वंशाग्रमुलान्तरभूमिवर्गौ वंशोद्धृतस्तेन पृथ-
ग्युतो नौ ॥ वंशौ तदर्थे भवतः क्रमेण वंशस्य खंडे
श्रुतिकोटिरूपे ॥

अर्थ—वेळूचें अग्र व वेळूचें मूळ यामधील जें भूमीचें मान
असेल त्याच्या वर्गास वेळूच्या उंचीनें भागावें, जो भागाकार
येईल तो वेळूच्या उंचीमध्ये मिळवावा व वजा करावा; आणि
त्यांचीं अर्धे केलीं असतां क्रमानें कर्णरूप व कोटिरूप अशीं
वेळूचीं खंडे येतात.

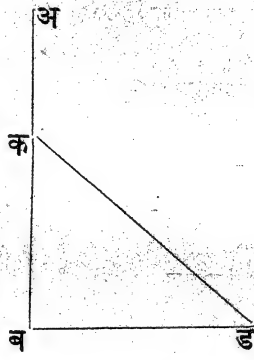
उदाहरणम्—यदि समभुवि वेणुर्द्वित्रिपाणिप्रमाणो
गणक पवनवेगादेकदेशे स भग्नः ॥ भुवि नृपमितहस्ते-
ष्वंग लग्नं तदग्रं कथय कतिषु मूलादेष भग्नः करेषु ॥

अर्थ—सपाट जमिनीवर ३२ हात उंचीचा वेळू उभा
होता तो वाऱ्याच्या झपाट्यानें एका ठिकाणीं मोडून त्याचें
अग्र जमिनीवर वेळूच्या मूळापासून १६ हातावर लागलें तर
तो वेळू मूळापासून किती हात उंचीवर मोडला असावा हें सांग?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

वेळूचें अग्र व वेळूचे मूळ यामधील भूमीचें मान १६ याचा वर्ग
२५६ साला. यास वेळूची उंची ३२ यानें भागून भागाकार ८ आला.
हा वेळूच्या उंची ३२ मध्ये मिळवून व वजा करून २० व २४ आले.
यांचीं अर्धे २० व १२ सालीं; म्हणून मूळापासून १२ हात उंचीवर तो
वेळू मोडला होता हें उत्तर.

उपपत्ति.



या आकृतीमध्ये अ ब, हा वेळ आहे, क, हें वेळ मोडल्याचें स्थळ, ड हें वेळूचें अग्र जमिनीवर लागलेलें स्थळ, आणि व, हें वेळूचें मूळ समजा.

आतां अव = ब; कब = य; कड = क्ष; आणि बड = भ
अशा संज्ञा देऊन

$$क्ष^2 - य^2 = भ^2$$

$$\therefore (क्ष + य)(क्ष - य) = भ^2$$

$$\therefore क्ष - य = \frac{भ^2}{क्ष + य}$$

$$\text{आणि } क्ष + य = व \dots\dots\dots (१)$$

$$\therefore क्ष - य = \frac{भ^2}{व} \dots\dots\dots (२)$$

समीकरण (१) व (२) याची बेरीज करून

$$२ क्ष = व + \frac{भ^2}{व}$$

(१२०)

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{व + \frac{भ^2}{व}}{२}$$

समीकरण (१) मधून (२) वजा करून

$$२ \text{ य} = व - \frac{भ^2}{व}$$

$$\therefore \text{य} = \frac{व - \frac{भ^2}{व}}{२}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

श्लोक—स्तंभस्य वर्गोऽहिबिलांतरेण भक्तः फलं व्याल
बिलांतरालात् ॥ शोध्यं तदर्धप्राप्तैः करैः स्याद्विला-
ग्रतो व्यालकलापियोगः

अर्थ—खांबाच्या उंचीच्या वर्गास, सर्प व बिल यांच्या
अंतराने भागून जें फल येईल तें, सर्प व बिल यांच्या अंतरांतून
वजा करून अर्ध केले असतां जी संख्या होईल तत्तुल्य हातावर
बिलापासून सर्प व मयूर यांचा संयोग होईल.

उदाहरणम्—अस्ति स्तंभतले बिलं तदुपरि क्रीडा-
शिखंडी स्थितः स्तंभे हस्तनवोच्छ्रिते त्रिगुणितस्तंभप्रमा-
णान्तरे ॥ दृष्ट्वाऽहिं बिलमाव्रजंत मपत चिर्यक्स तस्थो-
परि क्षिप्रं ब्रूहि तयोर्बिलात्कतिमितैः साम्येन गत्योर्युतिः ॥

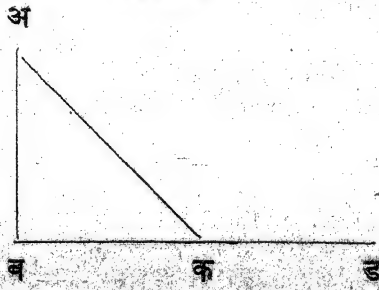
अर्थ—एक खांब ९ हात उंचीचा असा उभा होता
त्याच्या तळास एक बिल होते व खांबाच्या अग्रावर एक
मयूर बसलेला होता. त्याने खांबाच्या तळापासून २७ हात
अंतरावर एक सर्प बिलाकडे येत आहे असा पाहिला तेव्हां त्या

मयूरानें कर्णमार्गानें त्यावर झडप घातली. त्यांत मयूर व सर्प यांची गति समान आहे तर मयूरानें सर्पास बिळापासून किती अंतरावर पकडलें हें सांग !

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

सांबाची उंची ९ याचा वर्ग ८१ यास सर्प व बिल यामधील अंतर २७ यानें भागून फल ३ आलें हें २७ तून वजा करून २४ याचें अर्ध १२ आलें म्हणून बिळापासून १२ हात अंतरावर मोरानें सर्पास पकडलें हें उत्तर.

उपपत्ति.



या आकृतीमध्ये अ ब हा खांब, अ ह्या स्थळीं मयूर व ह्या स्थळीं बिल, ड स्थळीं सर्प, आणि क स्थळीं उभयतांची मांड पडली असे समजा.

$$\text{येथे } अ ब = म;$$

$$अ क = क्ष$$

$$ब क = य$$

अशा संज्ञा देऊन

$$क्ष - य = म$$

$$(क्ष + य) (क्ष - य) = म^2$$

(१२२)

$$\therefore \text{क्ष} - \text{य} = \frac{\text{भ}^2}{\text{क्ष} + \text{य}} \dots\dots\dots (१)$$

आतां अ क आणि क ड ह्या दोन्ही समान आहेत कारण उभयतांची गति समान आहे. म्हणून

$$\text{क्ष} + \text{य} = \text{सर्प बिलांतर} \dots\dots\dots (२)$$

ही किंमत (१) मध्ये ठेवून

$$\text{क्ष} - \text{य} = \frac{\text{भ}^2}{\text{सर्प बिलांतर}} \dots\dots\dots (३)$$

समीकरण (२) व (३) यांची वजाबाकी करून

$$२ \text{ य} = \text{सर्प बिलांतर} - \frac{\text{भ}^2}{\text{सर्प बिलांतर}}$$

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{सर्प बिलांतर} - \frac{\text{स्तंभ}^2}{\text{सर्प बिलांतर}}}{२}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

श्लोक—भुजाद्वगितात्कोटिकर्णान्तरासं द्विधा कोटि-
कर्णांतरेणोनयुक्तम् ॥ तदर्थं क्रमात्कोटिकर्णौ भवेतामिदं
धीमता वेत्य सर्वत्र योज्यम् ॥ सखे पद्म तन्मज्जन स्थान-
मध्यं भुजः कोटिकर्णांतरं पद्म दृश्यम् नलः कोटिरेतन्मितं
स्याद्यतोऽभो वदैवं समानीय पानीयमानम् ॥

अर्थ—भुजाच्या वर्गास कर्ण व कोटि यांच्या अंतरांने

भागून जें लब्ध घईल तें दोन ठिकाणीं मांडावें. आणि त्यांतील एका ठिकाणीं कर्ण व कोटि यांचें अंतर वजा करावें व दुसऱ्या ठिकाणीं मिळवावें. नंतर त्यांचीं अर्धे केलीं असतां क्रमानें कोटि व कर्ण यांच्या किंमती येतात.

जलपृष्ठास कमलाचा दांडा ज्या ठिकाणीं लागला आहे तें स्थल, व कमल ज्या ठिकाणीं बुडालें दिसलें तें स्थल या मधील जें अंतर तो येथें भुज समजावा. जलपृष्ठावरील कमलाची जी उंची, तें कोटि व कर्ण यांचें अंतर होय. आणि जलपृष्ठापर्यंत जी कमलाच्या दांड्याची उंची ती कोटि समजावी.

उदाहरणम्—चक्रकौचाकुलितसलिले कापि दृष्टं त-
डागे तोयादूर्ध्व कमलकलिकाग्रं वितस्तिप्रमाणम् ॥ मंदं
मंदं चलितमनिलेनाऽऽहतं हस्तयुग्मे तस्मिन्मयं गणक
कथय क्षिप्रमम्बुप्रमाणम् ॥

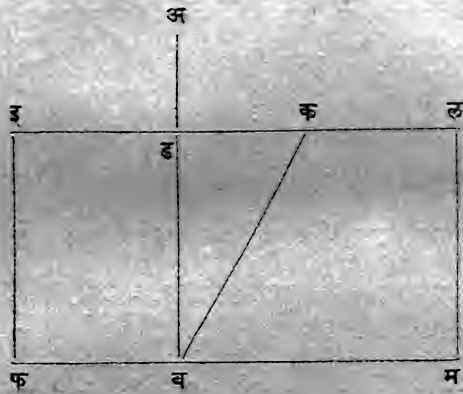
अर्थ—चक्रवाकपक्षी आणि कौचपक्षी यांनी व्याप्त अशा एका तळ्यामध्ये कमलाची कळी पाहिली तिचे अग्र जलपृष्ठापासून एक वीतभर उंचीवर होतें. तें वाऱ्यानें हालल्यामुळे दोन हात अंतरावर बुडालें तर त्या तळ्यामध्ये पाण्याची उंची किती होती हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथें भुज २ याचा वर्ग ४ यास कर्ण व कोटी यांचें अंतर $\frac{1}{2}$ यानें भागून लब्धि ८ आली. यामध्ये $\frac{1}{2}$ वजा करून व मिळवून $\frac{15}{2}$ व $\frac{17}{2}$ आले यांचीं अर्धे $\frac{15}{4}$ व $\frac{17}{4}$ झालीं म्हणून $\frac{15}{4}$ ही जलाची उंची झाली हें उत्तर.

(१२४)

उपपत्ति.



या आकृतीमध्ये इ फ म ल हे तळें, इ ड कल हे जलपृष्ठ,
अ व हे कमल, क हे कमल बुडालेले स्थळ समजावें.

$$\text{डक} = \text{भुज} = \text{म}$$

$$\text{वक} = \text{कर्ण} = \text{क्ष}$$

$$\text{बड} = \text{कोटि} = \text{य}$$

अशा संज्ञा देउन

$$\text{क्ष} - \text{य} = \text{भे}$$

$$\therefore (\text{क्ष} + \text{य})(\text{क्ष} - \text{य}) = \text{भे}$$

$$\therefore \text{क्ष} + \text{य} = \frac{\text{भे}}{\text{क्ष} - \text{य}}$$

$$\text{क्ष} - \text{य} = \frac{1}{2} = \text{व धरून}$$

$$\text{क्ष} + \text{य} = \frac{\text{भे}}{\text{व}}$$

बरील दोन्ही समीकरणांची बेरीज व वजाबाकी करून

$$१ \text{ क्ष} = \frac{\text{भै}}{\text{व}} + \text{व}$$

$$२ \text{ य} = \frac{\text{भै}}{\text{व}} - \text{व}$$

अशीं दोन समीकरणें झालीं

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{\frac{\text{भै}}{\text{व}} + \text{व}}{२}$$

$$\text{य} = \frac{\frac{\text{भै}}{२} - \text{व}}{२}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली

श्लोक—द्विनिघ्नतालोच्छ्रितिसंयुतं यत्सरोतरं तेन विभा-
जितायाः ॥ तालोच्छ्रितेस्तालसरोतरद्वया उड्डीयमानं खलु
लभ्यते तत् ॥

अर्थ—तालवृक्षाच्या उंचीच्या दुप्पटीमध्ये वृक्षापासून
विहिरीचें जें अंतर असेल तें मिळवून जी बेरीज होईल, तिनें
तालवृक्षाची उंची व विहिरीचें अंतर यांच्या गुणाकारास भागिलें
असतां उड्डीयमान येतें.

उदाहरणम्—वृक्षाद्वस्तशतोच्छ्रयाच्छतयुगेवापी कपिः
कोऽप्यगादुत्तीर्याथ परो द्रुतं श्रुतिपयात्प्रोड्डीय किञ्चिद्-
द्रुमात् ॥ जातैवं समाता तयोर्यदि गतावुड्डीयमानं किय-
द्विद्वैश्वेत्सुपरिश्रमोऽस्ति गणिते क्षिप्रं तदाचक्ष्व मे ॥

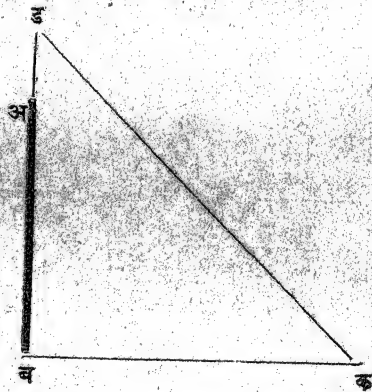
(१२६)

अर्थ—१०० हात उंचीचा एक तालवृक्ष होता. त्या वृक्षा-
पासून २०० हात लांबीवर विहीर होती. आणि त्या तालवृक्षाच्या
शेंड्यावर दोन वानर बसले होते. त्यांपैकी एक वानर वृक्षा-
वरूनच खाली उतरून विहिरीकडे जाण्यास निघाला व दुसरा
वानर कांहीं उड्डाण करून कर्णभागाने विहिरीकडे जाण्यास
निघाला. त्या दोघांचे गतिसाम्य होऊन विहिरीवर पोचले तर
दुसऱ्या वानराने उड्डाण किती केले हे सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

तालवृक्षाची उंची १०० हिची दुप्पट २०० यांत विहिरीचे अंतर
२०० मिळवून ४०० झाले. या संख्येने विहिरीचे अंतर २०० व वृक्षाची
उंची १०० यांचा गुणाकार २०००० यास भागून ५० लब्धि आली
म्हणून ५० उड्डायमान हे उत्तर.

उपपत्ति.



या आकृतीमध्ये अ व हा तालवृक्ष, क या स्थळी विहीर,
अ व या स्थळी दोन वानर बसले आहेत अ ड हे उड्डायमान
आहे असे समजा.

$$\text{येथें अ ङ = क्ष}$$

$$\text{अ व = य}$$

$$\text{व क = ज्ञ}$$

$$\text{ङ क = क}$$

याप्रमाणें संज्ञा देऊन.

$$(\text{क्ष} + \text{य}) + \text{ज्ञ} = \text{कै}$$

$$\therefore \text{क्ष} + २\text{क्ष य} + \text{य} + \text{ज्ञ} = \text{कै} \dots\dots (१)$$

दोन्ही गति समान आहे.

$$\therefore \text{य} + \text{ज्ञ} = \text{क्ष} + \text{क}$$

$$\therefore \text{क} = \text{य} + \text{ज्ञ} - \text{क्ष}$$

दोन्ही पक्षांच वग करून

$$\text{कै} = \text{य} + \text{ज्ञ} + \text{क्ष} + २\text{य ज्ञ} - २\text{क्ष य} - २\text{क्ष ज्ञ}$$

या समीकरणांतून समीकरण (१) वजा करून,

$$२\text{य ज्ञ} - २\text{क्ष य} - २\text{क्ष य} - २\text{क्ष ज्ञ} = ०$$

$$\therefore २\text{य ज्ञ} - ४\text{क्ष य} - २\text{क्ष ज्ञ} = ०$$

२ या संख्येनें भागून

$$\text{य ज्ञ} - २\text{क्ष य} - \text{क्ष ज्ञ} = ०$$

$$\therefore २\text{क्ष य} + \text{क्ष ज्ञ} = \text{य ज्ञ}$$

$$\therefore \text{क्ष} (२ + \text{ज्ञ}) = \text{य ज्ञ}$$

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{\text{य ज्ञ}}{२\text{य} + \text{ज्ञ}}$$

म्हणून दृष्टसिद्धि झाली.



(१२८)

श्लोक—कर्णस्य वर्गाद्विगुणाद्विशोध्यो दोष्कोटियोगः
स्वगुणोऽस्य मूलम् ॥ योगो द्विधा मूलविहीनयुक्तः स्याद
तदर्थे भुजकोटिमाने ॥

अर्थ—समीकरणरूपाने देऊं.

$$\text{भुज} = \frac{\text{भुजकोटियोग} - \sqrt{२ \text{ कर्ण}^२ - \text{भुजकोटियोग}^२}}{२}$$

$$\text{कोटि} = \frac{\text{भुजकोटियोग} + \sqrt{२ \text{ कर्ण}^२ - \text{भुजकोटियोग}^२}}{२}$$

उदाहरणम्—दश सप्ताधिकाः कर्णस्त्रयधिका विंशतिः
सखे ॥ भुजकोटियुतिर्यत्र तत्र ते मे पृथग्वद ॥

अर्थ—ज्या काटकोन त्रिकोणामध्ये कर्ण १७ आहे व
भुजकोटियोग २३ आहे तर भुज व कोटि यांची पृथक् मानें
काय आहेत हें सांग !

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

मागे दिलेल्या सारणीमध्ये उदाहरणांत दिलेल्या किमती ठेवून.

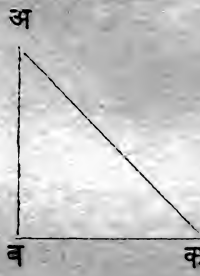
$$\text{भुज} = \frac{२३ - \sqrt{२ (१७)^२ - (२३)^२}}{२}$$

$$\text{भुज} = \frac{२३ - ७}{२} = ८ \text{ हें उत्तर.}$$

$$\text{कोटि} = \frac{२३ + \sqrt{२ (१७)^२ - (२३)^२}}{२}$$

$$\text{कोटि} = १५ \text{ हें उत्तर.}$$

उपपत्ति.



या आकृतीमध्ये अ ब, ही कोटि, ब क हा भुज आणि अ क, हा कर्ण समजा.

$$\text{येथे अ ब} = \text{क्ष}$$

$$\text{ब क} = \text{य}$$

$$\text{अ क} = \text{क}$$

अशा संज्ञा देऊन

$$\text{भुज कोटि योग} = \text{क्ष} + \text{य} = \text{ब धरून क्ष} + \text{य} = \text{क}$$

उभयपक्षांस २ ने गुणून

$$२ \text{ क्ष} + २ \text{ य} = २ \text{ क} \dots\dots\dots (१)$$

$$\text{आतां क्ष} + \text{य} = \text{ब}$$

या समीकरणांतील उभयपक्षाचा वर्ग करून

$$\text{क्ष} + \text{य} + २ \text{ क्ष य} = \text{ब} \dots\dots\dots (२)$$

समीकरण (१) व (२) यावरून

$$(२ \text{ क्ष} + २ \text{ य}) - (\text{क्ष} + \text{य} + २ \text{ क्ष य}) = २ \text{ क} - \text{ब}$$

$$\therefore \text{क्ष} + \text{य} - २ \text{ क्ष य} = २ \text{ क} - \text{ब}$$

(१३०)

उभयपक्षांची मूळें काढून

$$\text{क्ष} - \text{य} = \sqrt{२\text{क}^३ - \text{ब}^३}$$

$$\text{क्ष} + \text{य} = \text{ब}$$

या दोन समीकरणावरून

$$\text{क्ष} = \frac{\text{ब} + \sqrt{२\text{क}^३ - \text{ब}^३}}{२}$$

$$\text{य} = \frac{\text{ब} - \sqrt{२\text{क}^३ - \text{ब}^३}}{२}$$

$$\therefore \text{कोटि} = \frac{\text{भुजकोटियोग} + \sqrt{२ \text{कर्ण}^३ - \text{भुजकोटियोग}^३}}{२}$$

$$\text{भुज} = \frac{\text{भुजकोटियोग} - \sqrt{२ \text{कर्ण}^३ - \text{भुजकोटियोग}^३}}{२}$$

खणून इष्टासिद्धि झाली. =

वरील सारणीमध्ये भुजकोटियोगाचे जागीं भुजकोट्यंतर असले तरी भुज व कोटि यांच्या किमती येतात.

उदाहरणम्—दोष्कोट्योरंतरं शैलाः कर्णो यत्र त्रयोदश ॥ भुजकोटी पृथक्त्र वदाऽऽशु गणकोत्तम ॥

अर्थ—कर्ण १३ व भुजकोट्यंतर ७ आहे तर भुज कोटी यांच्या पृथक् किमती सांग ?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

$$\text{भुज} = \frac{७ - \sqrt{२(१३)^३ - (७)^३}}{२}$$

$$= -५ \frac{१}{२} \text{ उत्तर}$$

$$\text{कोटि} = \frac{७ + \sqrt{२(१३)^३ - (७)^३}}{२}$$

$$= १२ \frac{१}{२} \text{ उत्तर}$$

श्लोक—अन्योन्यमूलाग्रसूत्रयोगाद्वेण्वोर्वधे योगहृते च
लंबः ॥ वंशौ स्वयोगेन हृतावभीष्टभूग्नौ च लंबोभ-
यतः कुस्वण्डे ॥

अर्थ—दोन उभे असलेल्या वेळूंच्या ज्या उंची असतील
त्यांच्या गुणाकारास त्यांच्याच बेरजेने भागिले असतां परस्पर
मूलाग्रगत सूत्रांच्या योगापासून भूमीपर्यंत काढलेल्या लंबाची
किंमत येते.

दोन्ही वेळूंच्या उंचीस पृथक्, वेळूंच्या उंचींच्या बेरजेने
भागून इष्टभूमीने (दोन वेळू मधील अंतराने) गुणिले असतां
लंबाच्या दोन्ही बाजूकडील भूमीचीं खंडे येतात.

उदाहरणम्—पंचदश दशकरोच्छ्रायवेष्णोरज्ञातमध्य-
भूमिकयोः ॥ इतरेतरमूलाग्रसूत्रयुतेर्लंबमानमाचक्ष्व ॥

अर्थ—सपाट जमिनीवर १५ हात उंचीचा व १० हात
उंचीचा असे दोन वेळू कांहीं अंतरावर उभे केलेले आहेत.
त्यांतील एका वेळूच्या अग्रापासून दुसऱ्या वेळूच्या मूलापर्यंत
सूत्र बांधिले व तसेच पहिल्याच्या मूलापासून दुसऱ्याच्या अग्रा-
पर्यंत सूत्र बांधिले आणि बांधलेल्या दोन सूत्रांचा संयोग ज्या
ठिकाणी झाला आहे त्यापासून भूमीपर्यंत लंब काढिला आहे
त्या लंबाची किंमत काय? आणि दोन वेळूमधील अंतरभूमी
इष्ट घळून लंबाच्या दोन्ही बाजूंस अंतरभूमीच्या खंडांच्या
किंमती काय येतील हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{लंब} = \frac{१५ \times १०}{१५ + १०} = ६ \text{ हें उत्तर.}$$

अंतरभूमी ५ इष्ट घळून



(१३२)

$$\text{प्रथमसंड} = \frac{१५ \times ५}{१५ + १०} = ३ \text{ हैं उत्तर.}$$

$$\text{द्वितीयसंड} = \frac{१० \times ५}{१५ + १०} = २ \text{ हैं उत्तर.}$$

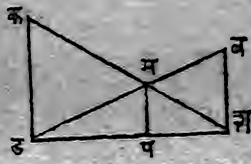
अंतर भूमी २० इष्ट धरून

$$\text{प्रथमसंड} = \frac{१५ \times २०}{१५ + १०} = १२ \text{ हैं उत्तर}$$

$$\text{द्वितीयसंड} = \frac{१० \times २०}{१५ + १०} = ८ \text{ हैं उत्तर}$$

याप्रमाणें अनेक इष्ट धरून संडांच्या किमती अनेक येतील परंतु सर्वत्र लंबाची किमत एकच येते.

उपपत्ति.



या आकृतीमध्ये क ड हा एक वेळू; व श हा दुसरा वेळू; क श हे बांधलेले सूत्र; व ड हे बांधलेले दुसरें सूत्र; त्या दोन्ही सूत्रांचा संयोग म या स्थळी झाला, व त्यापासून म प हा लंब भूमीवर टाकलेला आहे असे समजा.

येथें क ड = अ

व श = ब

म प = ल

ड श = भ

ड प = क्ष

आणि प श = य

अशा संज्ञा देऊन.

ड प म, आणि ड श व हे दोन त्रिकोण सरूप असल्यामुळे आणि श प म, आणि श ड क, हे दोन त्रिकोण सरूप असल्यामुळे

$$\frac{\text{क्ष}}{\text{ल}} = \frac{\text{क्ष} + \text{य}}{\text{ब}}$$

$$\frac{\text{य}}{\text{ल}} = \frac{\text{क्ष} + \text{य}}{\text{अ}}$$

या दोन समीकरणांची बेरीज करून

$$\frac{\text{क्ष} + \text{य}}{\text{ल}} = \frac{\text{क्ष} + \text{य}}{\text{ब}} + \frac{\text{क्ष} + \text{य}}{\text{अ}}$$

$$= \frac{\text{अ क्ष} + \text{अ य} + \text{ब क्ष} + \text{ब य}}{\text{अ ब}}$$

$$= \frac{\text{क्ष} (\text{अ} + \text{ब}) + \text{य} (\text{अ} + \text{ब})}{\text{अ ब}}$$

$$= \frac{(\text{क्ष} + \text{य}) (\text{अ} + \text{ब})}{\text{अ ब}}$$

उभयपक्षांस क्ष + य ह्याने मागून

$$\frac{1}{\text{ल}} = \frac{\text{अ} + \text{ब}}{\text{अ ब}}$$

$$\therefore \text{ल} = \frac{\text{अ ब}}{\text{अ} + \text{ब}} \dots \dots \dots (१)$$

$$\text{आतां } \frac{\text{अ}}{\text{म}} = \frac{\text{ल}}{\text{य}}$$



(१३४)

$$\therefore \quad y = \frac{म. ल}{अ}$$

यांत समीकरण (१) मधील (ल) ची किंमत ठेवून.

$$y = \frac{म. व}{अ + व} \dots \dots \dots (२)$$

$$\text{आणि } \frac{व}{म} = \frac{ल}{क्ष}$$

$$\therefore \quad क्ष = \frac{म. ल}{व}$$

यांत समीकरण (१) मधील (ल) ची किंमत ठेवून.

$$क्ष = \frac{म. अ}{अ + व} \dots \dots \dots (३)$$

म्हणून समीकरण (१), (२), व (३), यांपासून इष्ट-सूत्रासिद्धि झाली.

सूत्रम्—धृष्टेदिष्टपृजुभुजं क्षेत्रं यत्रैकबाहुतः स्वल्पा ॥
तदितरभुजयुतिस्थवा तुल्या ज्ञेयं तदक्षेत्रम् ॥

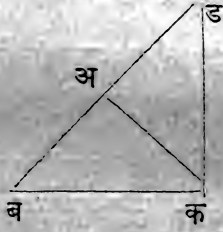
अर्थ—त्रिकोणांतील दोन बाजूंची बेरीज, तिसऱ्या बाजू-पेक्षा कमी किंवा तिसऱ्या बाजूबरोबर दिली असतां तें उदाहरण खोटे आहे म्हणून सांगारें. असाच नियम चतुरस्रादिकाचे ठिकाणीही समजावा.

उदाहरणम्—चतुरस्रे द्विषद्व्यर्का भुजाख्यस्य त्रिष-
ण्णव ॥ उद्दिष्टा यत्र धृष्टेन तदक्षेत्रं विनिर्दिशेत् ॥

अर्थ—एखाद्या उदाहरणांत एका धृष्टानें (मुखीनें) असें सांगितलें कीं, २, ६, ३, १२ अशा बाजू एका चतुरस्राच्या

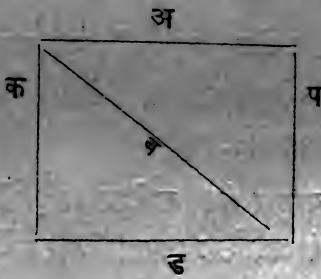
आहेत. व ३ . ६ . ९ अशा बाजू एका त्रिकोणाच्या आहेत. या सांगण्यामध्ये चतुरस्त्र किंवा त्रिकोण क्षेत्रच बनत नाही, खोटे उदाहरण आहे असे सांगावे.

उपपत्ति.



या आकृतीमध्ये अ ब क ह्या त्रिकोणाची अ ब बाजू ड बिंदुपर्यंत अशी वाढविली आहे की अ क आणि अ ड ह्या दोन्ही बाजू समान होतील.

आतां अ क आणि अ ड बाजू समान आहेत म्हणून अ क ड आणि अ ड क हे दोन्ही कोन समान आहेत म्हणून ब ड क कोनापेक्षां ब क ड कोन मोठा झाला म्हणून ब क बाजूपेक्षां ब ड बाजू मोठी असली पाहिजे. आणि ब ड बाजू ही अ ब आणि अ क ह्या दोन बाजूंबरोबर आहे म्हणून त्रिकोणांतील दोन बाजूंची बेरीज ही तिसऱ्या बाजूपेक्षां मोठी असते. कमी अथवा बरोबर असावयाची नाही हे सिद्ध झाले.



(१३६)

येथें प < अ + व

व < क + ड

∴ अ + व < अ + क + ड

∴ प < अ + क + ड

म्हणून चतुरस्रामध्येही तीन बाजूंची बेरीजही चवथ्या बाजूपेक्षा मोठी असते. म्हणून इष्टसूत्रसिद्धि झाली.

श्लोक—त्रिभुजे भुजयोर्योग स्तदंतरगुणो भुवा हतो लब्ध्या ॥ द्विष्टा भूरुनयुता दलिता बाधे तयो स्यातां ॥ स्वाबाधाभुजकृत्योरंतर मूलं प्रजायते लंबः ॥ लंबगुणं भुम्यर्धे स्पष्टं त्रिभुजेफलं भवति ॥

अर्थ—कोणत्याही त्रिकोणामध्ये दोन बाजूंच्या बेरीजेस त्याच दोन बाजूंच्या अंतरानें गुणावें. आणि आलेल्या गुणाकारास तिसऱ्या बाजूनें भागून जें फल येईल तें तिसऱ्या बाजूमध्ये वजा करावें व मिळवावें आणि त्यांचीं अर्धे केलीं असतां आबाधा येतात. आबाधा म्हणजे तिसऱ्या बाजूवर त्याच बाजू समोरील जो कोणविंदु त्यापासून काढलेला जो लंब, त्या लंबाच्या दोन्ही बाजूस जीं तिसऱ्या बाजूचीं खंडे होतात तीं समजावीं.

आरंभी घेतलेल्या दोन बाजूंपैकीं एक बाजू व त्या बाजूकडील आबाधा यांच्या वर्गाच्या अंतराचें वर्गमूळ काढिलें असतां लंबाची किंमत येते.

लंब व ज्या बाजूवर लंब काढिला आहे ती बाजू (भूमी) यांच्या गुणाकाराचें अर्धे केलें असतां त्रिकोणाचें क्षेत्रफल येतें.

उदाहरणम्—क्षेत्रे महीमनुमिता त्रिभुजे भुजौतु यत्र
त्रयोदशतिथिप्रमितौच मित्र ॥ तत्रावलंबकमिति कथया-
वधे च क्षिप्रंतथा च समकोष्ठमिति फलारूपां ॥

अर्थ—ज्या त्रिकोणांतील तीन भुजांचीं मानें १३, १९,
व १४ अशीं आहेत. यांतील भुज १४ यावर याच्या समोरील
कोणबिंदुपासून काढलेल्या लंबाची किंमत, आवाधाची किंमत,
व त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ काय हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया

भुज १३ व १५ यांची बेरीज २८ व अंतर २ झालें. बेरीजेस अंतरानें
गुणून ५६ यास तिसरी बाजू १४ हिनें भागून फल ४ आलें. हें तिसऱ्या
बाजू १४ मध्ये वजा करून व मिळवून १० व १८ यांची अर्धें ५ व ९
आलीं म्हणून ५ व ९ ह्या आवाधा झाल्या हें उत्तर.

भुज १३ व आवाधा ५ यांचे वर्ग १६९ व २५ यांचें अंतर १४४
याचें वर्गमूळ १२ आलें म्हणून लंबाची किंमत १२ हें उत्तर.

लंब १२ व तिसरी बाजू १४ यांच्या गुणाकाराचें अर्ध ८४ आलें
म्हणून त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ ८४ हें उत्तर.

अन्य उदाहरणम्—दशसप्तदशप्रमौ भुजौ त्रिभुजे यत्र
नवप्रमामही ॥ अबधे वद लंबकंतथा गणितंगाणितिका
शुतत्रमे ॥

अर्थ—ज्या त्रिकोणांतील भुजांचीं मानें १०, १७, व ९
अशीं आहेत. यांतील भुज ९ यावर याच्या समोरील कोण-
बिंदुपासून काढलेल्या लंबाची किंमत आवाधाच्या किंमती व
त्रिकोणाचें क्षेत्रफल काय हें सांग.

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

भुज १० व १७ यांची बेरीज २७ हिला त्यांच्याच अंतरानें ७
गुणून १८९ यास तिसऱ्या बाजूनें भागून फल २१ आलें, हें तिसऱ्या

(१३८)

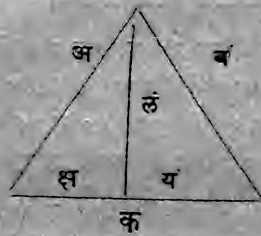
बाजू ९ मध्ये वजा करून व मिळवून ऋण १२ व धन ३० यांची अर्थ
ऋण ६ व धन १५ ह्या आबाधा झाल्या हे उत्तर.

भुज १० व आबाधा ऋण ६ यांच्या वर्गांचे अंतर ६४ याचे वर्गमूळ
८ ही लंबाची किंमत आली हे उत्तर.

लंब ८ व तिसरी बाजू ९ यांच्या गुणाकाराचे अर्थ ३६ आले म्हणून
हे त्रिकोणाचे क्षेत्रफल झाले हे उत्तर.

आतां या मार्गे दिलेल्या रीतीची उपपत्ति देऊ.

उपपत्ति.



या आकृतीमध्ये अ व क ह्या बाजू त्रिकोणाच्या आहेत, यांतील
क बाजूस भूमी म्हणण्याचा संप्रदाय आहे. आणि क बाजूवर
निच्या समोरील कोणनिडूपामून काढलेल्या लंबाने क बाजूचे
जे दोन तुकडे झाले आहेत यांस आबाधा म्हणण्याचा संप्रदाय
आहे त्या आबाधांस क्ष आणि य अशीं नावे दिली आहेत
असे समजा.

$$\text{आतां अ} - \text{क्ष} = \text{लं}$$

$$\text{आणि ब} - \text{य} = \text{लं}$$

$$\therefore \text{अ} - \text{क्ष} = \text{ब} - \text{य}$$

$$\therefore \text{क्ष} - \text{य} = \text{अ} - \text{ब}$$

$$\therefore (\text{क्ष} - \text{य})(\text{क्ष} + \text{य}) = \text{अ} - \text{ब}$$

$$\therefore \text{क्ष} - \text{य} = \frac{\text{अ}^2 - \text{ब}^2}{\text{क्ष} + \text{य}}$$

$$\text{आतां } \text{क्ष} + \text{य} = \text{क आहे} \dots\dots\dots (१)$$

$$\therefore \text{क्ष} - \text{य} = \frac{\text{अ}^2 - \text{ब}^2}{\text{क}} \dots\dots\dots (२)$$

या दोन समीकरणांच्या बेरजेवरून

$$२ \text{ क्ष} = \text{क} + \frac{\text{अ}^2 - \text{ब}^2}{\text{क}}$$

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{\text{क} + \frac{\text{अ}^2 - \text{ब}^2}{\text{क}}}{२}$$

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{\text{क} + \frac{(\text{अ} + \text{ब})(\text{अ} - \text{ब})}{\text{क}}}{२} \dots\dots (३)$$

समीकरण (१) व (२) यांची वजाबाकी करून

$$२ \text{ य} = \text{क} - \frac{\text{अ}^2 - \text{ब}^2}{\text{क}}$$

$$= \text{क} - \frac{(\text{अ} + \text{ब})(\text{अ} - \text{ब})}{\text{क}}$$

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{क} - \frac{(\text{अ} + \text{ब})(\text{अ} - \text{ब})}{\text{क}}}{२} \dots\dots (४)$$

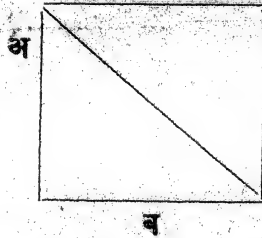


(१४०)

आतां $a^2 - s^2 = l^2$

$b^2 - y^2 = l^2$ आहे

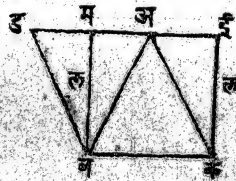
$\therefore l = \sqrt{\text{भुज}^2 - \text{आबाधा}^2} \dots \dots (१)$



येथे $a \times b = \text{समचतुर्स्त्र क्षेत्रफल}$

$\therefore \frac{a \times b}{2} = \text{त्रिकोणक्षेत्रफल} \dots \dots (२)$

अथवा खाली दिलेल्या आकृतीमध्ये



अ ब क त्रिकोणाचे क्षेत्रफल काढणे आहे.

$b \times क = स \text{ घटून}$

$ब क \times ई क = म ब क ई चतुरस्त्राचे फल$

$\therefore स \times ह = म ब क ई चतुरस्त्राचे फल.$

आतां $म ब क ई = अ ड ब क$

कारण समांतर रेषांच्या जोडांत दोन्ही चतुरस्त्रे आहेत.

आणि अ ड व क याचा कर्ण अ व आहे म्हणून

अ ड व = अ व क

$$\frac{\text{अ ड व क चतुरस्र}}{२} = \text{अ व क त्रिकोण.}$$

$$\therefore \text{अ व क त्रिकोणाचे क्षेत्रफल} = \frac{\text{क्ष} \times \text{ल}}{२} \dots (७)$$

म्हणून समीकरणे (३), (४), (५), (६) आणि (७) यांवरून इष्टमूत्राची सिद्धि झाली.

श्लोक—सर्वदोर्युतिदलंचतुः स्थितं बाहुभिर्विरहितं च तद्धतेः ॥ मूलमस्फुटफलं चतुर्भुजे स्पष्टमेव मुदितं त्रि-बाहुके ॥

अर्थ—सर्व भुजांच्या बेरजेचे अर्ध चार ठिकाणी मांडून त्यांतून एकेक भुज वजा करून त्यांचा गुणाकार केला असता त्रिकोणाचे क्षेत्रफल येते आणि वृत्तस्थ चतुरस्ताचे क्षेत्रफल याच रीतीने येते परंतु वृत्तस्थचतुरस्तावांचून अन्य चतुरस्ताचे क्षेत्रफल या रीतीने बरोबर येत नाही.

उदाहरणम्—भूमिश्रतुर्दशकरा मुख मंकसंख्यं बाहूत्रयोदशदिवाकरंसमितौ च ॥ लंबोपियत्तरविसंख्यक एवतत्र क्षेत्रफलंकथय तत्कथितं यदाद्यैः ॥

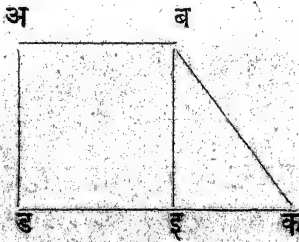
अर्थ—चतुरस्ताची भूमि ह्यणजे खालची बाजू १४ हात, मुख ह्यणजे वरची बाजू ९ हात, तिसरी बाजू १३ हात आणि चवथी बाजू १२ हात आहे व लंब १२ हात आहे या चतुरस्ताचे क्षेत्रफल सांग :

(१४२)

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

चतुरस्रांतील बाजू १४१३१२१९ यांची बेरीज ४८ हिचें अर्ध २४ यांतून प्रत्येक भुज वजा करून १०१११२१५ हीं शेषें राहिलीं यांचा गुणाकार $१० \times ११ \times १२ \times १५ = १९८००$ याचें आसन्न वर्गमूल १४९ आहे हें दिलेल्या रीतीनें चतुरस्राचें क्षेत्रफल झालें. परंतु हें क्षेत्रफल चुकीचें आहे कारण दिलेलें चतुरस्र वृत्तस्थ नाहीं.

दिलेल्या चतुरस्राचें सरें क्षेत्रफल किती घेतें हें काढून दाखवूं.



या आकृतीमध्ये अ ब क ड ह्या चतुरस्रांतील अ ब ९, ब क १३, ड क १४, अ ड १२ आणि ब ई लंब १२ अशीं प्रमाणें दिलीं आहेत.

$\therefore १२ \times ९ = १०८$ हें अ ब ई ड या चतुरस्राचें क्षेत्रफल झालें.

आणि
$$\frac{१२ \times (१४ - ९)}{२} = ३०$$

हें ब ई क त्रिकोणाचें क्षेत्रफल.

$\therefore १०८ + ३० = १३८$ हें दृष्ट चतुरस्राचें सरें क्षेत्रफल झालें.

आतां त्रिकोणाचें क्षेत्रफल दिलेल्या रीतीनें काढून दाखविण्याकरितां कल्पित उदाहरण देऊं.

ज्या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू. १३१५१४ अशा आहेत तर त्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफल काय ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

आजू १३१५१४ यांची बेरीज ४२ हिचें अर्ध २१ यांतून बाजू

वजा कहल ८।६।७ आले. त्रिकोणांत चवथी बाजू नसते म्हणून चवथ्या ठिकाणी २१ तून शून्य वजा केले.

आतां $८ \times ६ \times ७ \times २१ = ७०५६$ याचें वर्गमूल ८४ हे त्रिको-
णाचें क्षेत्रफल आलें हें उत्तर.

उपपत्ति.



या आकृतीमध्ये एका त्रिकोणाच्या अ ब क अर्शा बांनें
आहेत व लंबाचें मान ड आहे.

आतां त्रिभुजेभुजयोर्योग इत्यादि श्लोकानें आबाधेची किंमत
काढून

$$\text{आबाधा} = \frac{\text{क} + \frac{\text{अ}^2 - \text{ब}^2}{\text{क}}}{२}$$

$$\therefore \text{अ}^2 - \text{आबाधा} = \text{ड}^2$$

यांत आबाधेची किंमत ठेवून

$$\text{अ}^2 - \left(\frac{\text{क} + \text{अ}^2 - \text{ब}^2}{२ \text{क}} \right)^2 = \text{ड}^2$$

$$\therefore \left(\text{अ} - \frac{\text{क} + \text{अ}^2 - \text{ब}^2}{२ \text{क}} \right) \left(\text{अ} + \frac{\text{क} + \text{अ}^2 - \text{ब}^2}{२ \text{क}} \right) = \text{ड}^2$$

(१४४)

$$\therefore \left(\frac{२ अक - क^२ - अ^२ + ब^२}{२ क} \right) \left(\frac{२ अक + क^२ + अ^२ - ब^२}{२ क} \right) = ब^२$$

$$\left(\frac{ब^२ - (-२ अक + क^२ + अ^२)}{२ क} \right) \left(\frac{(२ अक + क^२ + अ^२) - ब^२}{२ क} \right) = ब^२$$

$$\therefore (ब^२ - (अ - क)^२) ((अ + क)^२ - ब^२) = ४ क^२ ब^२$$

वर्गांतर हें योग व अंतर यांच्या गुणाकाराबरोबर असतें.

$$\therefore (अ + ब - क)(-अ + ब + क)(अ + क - ब)(अ + क + ब) = ४ क^२ ब^२$$

$$\therefore ब = \frac{१}{२ क} \sqrt{(अ + ब - क)(-अ + ब + क)(अ + क - ब)(अ + क + ब)}$$

हें लंबाचें मान आलें यास भूमीच्या अर्धानें गुणिलें असतां त्रिकोणाचें क्षेत्रफल येईल म्हणून—

त्रिकोणाचें क्षेत्रफल =

$$\frac{क}{२} \cdot \frac{१}{२ क} \sqrt{(अ - क + ब)(-अ + ब + क)(अ + क - ब)(अ + ब + क)}$$

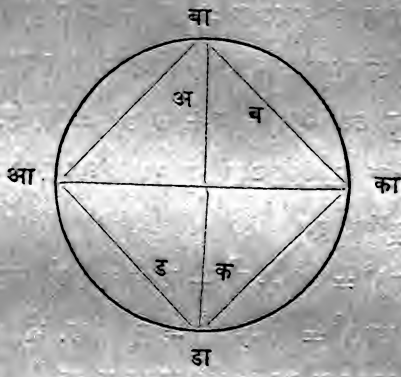
$$= \sqrt{\frac{(अ - क + ब)(-अ + ब + क)(अ + क - ब)(अ + ब + क)}{२ \times २ \times २ \times २}}$$

$$\frac{अ + ब + क}{२} = स \text{ नांव देऊन}$$

$$\text{त्रिकोण क्षेत्रफल} = \sqrt{(स - ०)(स - अ)(स - ब)(स - क)}$$

म्हणून त्रिकोण क्षेत्रफळाच्या रीतीची सिद्धी झाली.

आतां वृत्तस्थचतुरस्राच्या क्षेत्रफळाच्या रीतीची उपपत्ति देतों.



लंबगुणं भूम्यर्धं स्पष्टं त्रिभुजे फलं भवति. ही सोपपत्तिक
रीति मार्गे दिली आहे. यामध्ये लंबाची किंमत भुजज्या व
कर्ण या पदांत आणून

$$\frac{\text{अ.व. भुजज्या वा}}{२} = \text{आ वा का त्रिकोणाचें क्षेत्रफल.}$$

$$\frac{\text{आणि क. ड. भुजज्या डा}}{२} = \text{आ डा का}$$

त्रिकोणाचें क्षेत्रफल.

$$\therefore \frac{\text{अ.व. भुजज्या वा}}{२} + \frac{\text{क.ड. भुजज्या डा}}{२} =$$

आ वा का डा ह्या वृत्तस्थ चतुर्भुजाचें क्षेत्रफल.

$$\therefore \frac{१}{२} (\text{अ.व. भुजज्या वा} + \text{क.ड. भुजज्या डा}) =$$

चतुरस्र क्षेत्रफल.

आतां रेखा गणिताच्या तृतीयाध्यायाच्या २२ व्या
सिद्धांतावरून.

$$\text{वा} + \text{डा} = १८० \text{ अंश.}$$

(१४६)

∴ बा कोनाची भुजज्या = डा कोनाची भुजज्या

∴ $\frac{1}{2}$ (अब भुजज्या बा + कड भुजज्या बा) = च.क्षे. फ.

∴ $\frac{1}{2}$ भुजज्या बा (अब + कड) = च.क्षे. फ. (१)

आतां रेखा गणिताच्या दुसऱ्या अध्यायाच्या १३ व्या

सिद्धांतावरून

(आ का)^२ = अ^२ + ब^२ - २ अब . को भुजज्या बा.

व (आ का)^२ = क^२ + ड^२ - २ कड . को भुजज्या डा.

को भुजज्या डा = को भुजज्या बा

∴ (आ का)^२ = क^२ + ड^२ + २ कड . को भु. बा (२)

∴ क^२ + ड^२ + २ कड . को भु. बा = अ^२ + ब^२ - २ अब . को भु. बा

∴ २ कड . को भु. बा + २ अब . को भु. बा = अ^२ + ब^२ - क^२ - ड^२

∴ २ को भु. बा (कड + अब) = अ^२ + ब^२ - क^२ - ड^२

को भु. बा = $\frac{अ^२ + ब^२ - क^२ - ड^२}{२ (अब + कड)}$ (३)

त्रिकोणमितीवरून

भुजज्या बा + कोभुजज्या बा = १

∴ भुजज्या बा = १ - कोभुजज्या बा

यांत समीकरण (३) मधील किंमत ठेऊन

भु. बा = १ - $\left(\frac{अ^२ + ब^२ - क^२ - ड^२}{२ (अब + कड)} \right)^2$

= $\frac{(२ अब + २ कड)^२ - (अ^२ + ब^२ - क^२ - ड^२)^२}{४ (अब + कड)^२}$

$$= \frac{\{2(अव+कड)+अ+ब-क-ड\}\{2(अव+कड)+क+ड-अ-ब\}}{8(अव+कड)^2}$$

$$= \frac{\{(क+ड)^2-(अ-ब)^2\}\{(अ+ब)^2-(क-ड)^2\}}{8(अव+कड)^2}$$

$$= \frac{(क+ब+ड-अ)(अ+क+ड-ब)(अ+ब+ड-क)(अ+ब+क-ड)}{8(अव+कड)^2}$$

$$\text{येथे } \frac{अ+क+ब+ड}{2} = स \text{ धरून}$$

$$\text{भुं बा} = \frac{(२स-२अ)(२स-२ब)(२स-२क)(२स-२ड)}{8(अव+कड)^2}$$

$$= \frac{१६(स-अ)(स-ब)(स-क)(स-ड)}{8(अव+कड)^2}$$

$$\therefore \text{भु. बा} = \frac{२\sqrt{(स-अ)(स-ब)(स-क)(स-ड)}}{अव+कड}$$

ही किंमत (१) समीकरणांत ठेवून

$$\text{चतुरस्रक्षेत्रफल} = \sqrt{(स-अ)(स-ब)(स-क)(स-ड)}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

श्लोक—चतुर्भुजस्यानियतौ हि कर्णौ कथं ततोऽस्मि-
न्नियतं फलं स्यात् ॥ प्रसाधितौ तच्छ्रवणौ यदौघः स्वक-
ल्पितौ तावितरत्र न स्तः ॥ तेष्वेव बाहुष्वपरौ च कर्णा-
वनेकधा क्षेत्रफलं ततश्च ॥

अर्थ—मागच्या श्लोकांतील रीति वृत्तस्थचतुरस्रावाचून



अन्य चतुरस्त्राचें क्षेत्रफल काढण्यास उपयोगी पडत नाही असें सांगितलें आहे त्याचें कारण असें आहे कीं, त्या चतुरस्त्राचे दोन्ही कर्ण अनियमित असतात तेव्हां क्षेत्रफल निश्चित कसें सांगतां येईल. येणार नाही हें उघड आहे. चतुरस्त्राचे जे भुज असतात तेच भुजसंकोचित (आंतल्या बाजूस दाबिले) केले असतां पहिल्या चतुरस्त्राचे जे कर्ण असतात तेच कर्ण दुसऱ्या भुज संकोचित चतुरस्त्राचे येत नाहीत भिन्न येतात. भुज मात्र पहिल्या चतुरस्त्राचे जे असतात तेच कायम राहून क्षेत्र निराळें होतें तेव्हां क्षेत्रफलही निराळें होईल हें उघड आहे.

श्लोक—लंबयोः कर्णयोर्वैकमनिर्दिश्यापराङ्कथम् ॥
पृच्छत्यनियतत्वेऽपि नियतं चापि यत्फलम् ॥ स पृच्छकः
पिशाचो वा वक्ता वा नितरां ततः ॥ यो न वेत्ति चतु-
र्बाहौ क्षेत्रे ह्यनियतां स्थितिम् ॥

अर्थ—चतुरस्त्रांतील लंब किंवा कर्ण न सांगतां क्षेत्रफल विचारिलें असतां जो नियत क्षेत्रफलाचें उत्तर देतो तो व पृच्छक हे पिशाच समजलें पाहिजेत. कारण त्यांना चतुरस्त्रां-
तील अनियत स्थिति माहित नाही.

श्लोक—इष्टा श्रुतिस्तुल्यचतुर्भुजस्य कल्प्याऽथ तद्गो-
विर्वाजिता या ॥ चतुर्भुजा बाहुकृतिस्तदीयं मूलं द्वितीय
श्रवणप्रमाणम् ॥ अतुल्यकर्णाभिहतिर्द्विभक्ता फलं स्फुटं
तुल्यचतुर्भुजे स्यात् ॥ समश्रुतौ तुल्यचतुर्भुजे च तथाऽऽयते
तद्भुजकोटिघातः ॥ चतुर्भुजेऽन्यत्र समानलंबे लंबेन निघ्नं
क्षुण्णैक्यखंडम् ॥

अर्थ— समचतुर्भुजाचा भुज व एक कर्ण दिल्या असतां त्यां-
वरून दुसरा कर्ण काढण्याची रीति—

भुजवर्गाच्या चौपटीतून कर्णवर्ग वजा करून बाकीचे वर्ग मूळ काढिले असता दुसऱ्या कर्णाचे मान येते.

समचतुर्भुजाच्या दोन्ही कर्णांवरून त्या समचतुर्भुजाचे क्षेत्रफल काढण्याची रीति.

दोन्ही कर्णांच्या गुणाकाराचे अर्ध केले असता समचतुर्भुजाचे क्षेत्रफल येते.

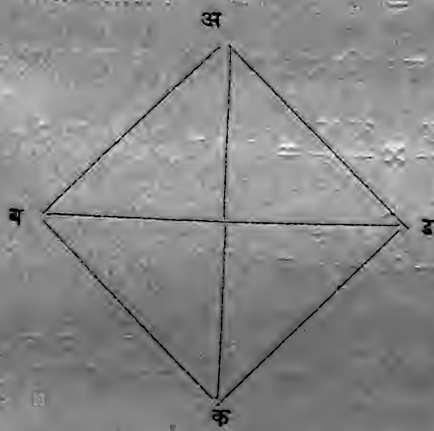
समकर्णसमचतुर्भुज व काटकोन चौकोन यांचे क्षेत्रफल काढण्याची रीति.

भुज व कोटि यांचा गुणाकार केला असता इष्ट क्षेत्रफल येते.

समांतर द्विभुज चतुरस्राचे क्षेत्रफल काढण्याची रीति.

भूमि (खालची बाजू) व मुख (वरची बाजू) यांच्या बेरजेच्या अर्धास लंबाने गुणिले असता इष्ट क्षेत्रफल येते.

उपपत्ति.



अ ब क ड ह्या समचतुरस्रांतील अ क आणि ब ड ह्या कर्णांच्या किमती काढू.



(११०)

$$\left(\frac{\text{अ क}}{२}\right)^2 + \left(\frac{\text{ब ड}}{२}\right)^2 = \text{अ ड}^2$$

येथें अ क = आ

ब ड = डा

अ ड = बा

अशीं नांवे देऊन

$$\frac{\text{आ}^2}{४} + \frac{\text{डा}^2}{४} = \text{बा}^2$$

$$\therefore \text{डा}^2 = ४ \text{ बा}^2 - \text{आ}^2$$

$$\therefore \text{डा} = \sqrt{४ \text{ बा}^2 - \text{आ}^2} \dots\dots\dots$$

$$\text{आणि आ} = \sqrt{४ \text{ बा}^2 - \text{डा}^2} \dots\dots\dots$$

आतां अ क आणि ब ड ह्या दोन्ही रेषा परस्प

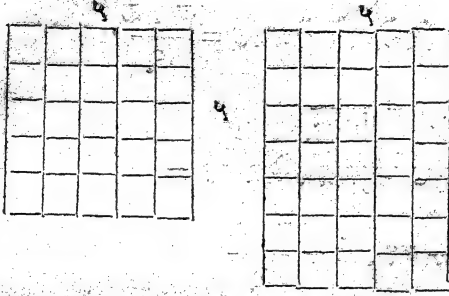
$$\therefore \frac{\text{ब ड}}{२} \times \frac{\text{अ क}}{२} = \text{अ ब ड त्रिकोणाचे}$$

$$\text{व } \frac{\text{ब ड}}{२} \times \frac{\text{अ क}}{२} = \text{ब क ड त्रिकोणाचे}$$

$$\therefore \text{चतुरस्र क्षेत्रफल} = \frac{\text{ब ड} \cdot \text{अ क}}{४} +$$

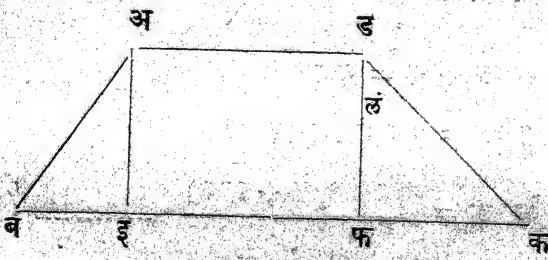
$$\therefore \text{च. क्षेत्र. फ} = \frac{\text{ब ड} \times \text{अ क}}{२} \dots\dots\dots$$

(१९१)



या आकृतीवरून सहज दिसून येईल, कीं भुज व कोटि यांच्या गुणाकाराबरोबरच आंतील कोष्टकें तयार झालीं आहेत.

∴ काटकोन चतुरस्रक्षेत्रफल = भुज × कोटि (४)



अ ब क ड ह्या समांतर द्विभुज चतुरस्राचें क्षेत्रफल काढूं.

येथें ब ई = डा

अ ड = आ

आणि फ क = य

अशीं नांवें देऊन

अ ब ई त्रिकोणाचें क्षेत्रफल = $\frac{\text{लं} \cdot \text{डा}}{२}$

अ ड फ ई चतुरस्राचें क्षेत्रफल = आ . ल

(१५२)

$$\text{ड फ क त्रिकोणाचें क्षेत्रफल} = \frac{\text{य} \cdot \text{ल}}{२}$$

सर्वांची बेरीज करून

$$\text{अ ब क ड चतुरस्राचें क्षेत्रफल} =$$

$$\frac{\text{लं} \cdot \text{डा}}{२} + \text{आ} \cdot \text{लं} + \frac{\text{य} \cdot \text{ल}}{२}$$

$$\therefore \text{च. क्षे. फ.} = \frac{\text{लं} \cdot \text{डा} + २ \text{ आ} \cdot \text{लं} + \text{य} \cdot \text{ल}}{२}$$

$$\therefore \text{च. क्षे. फ.} = \frac{\text{लं} (\text{डा} + २ \text{ आ} + \text{य})}{२}$$

$$\text{आ} + \text{डा} + \text{य} = \text{भूमि}$$

$$\text{आणि आ} = \text{मुख संज्ञादेऊन}$$

$$\text{च. क्षे. फ.} = \frac{\text{लं} (\text{भूमि} + \text{मुख})}{२} \dots\dots\dots (५)$$

म्हणून समीकरणें (१), (२), (३), (४) व (५) यांवरून सर्व इष्टसिद्धि झाली.

उदाहरणम्—क्षेत्रस्य पंचकृतितुल्यचतुर्भुजस्य कर्णौ ततश्च गणितं गणक प्रचक्ष्व ॥ तुल्यश्रुतेश्च खलु तस्य तथाऽऽयतस्य यद्विस्तृती रसामिताष्टमितं च दैर्घ्यम् ॥

अर्थ—समचतुर्भुज क्षेत्राचा भुज २५ आहे त्यांतील एक कर्ण इष्ट धरून दुसरा कर्ण काढून दाखीव ? व त्या चतुरस्राचे क्षेत्रफल सांग ? आणि ज्या काटकोन चौकोनाची रुंदी ६ हात व लांबी ८ हात आहे त्याचे क्षेत्रफल काय ?

(१९३)

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

$$\text{कर्ण} = \sqrt{४ \text{ भुज}^2 - \text{इष्टकर्ण}^2}$$

यांत इष्टकर्ण ३० धरून व भुजाची किंमत दिलेली २५ ठेवून

$$\text{कर्ण} = \sqrt{४ \times ६२५ - ९००}$$

∴ कर्ण = ४० हें उत्तर.

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{३० \times ४०}{२} = ६०० \text{ हें उत्तर.}$$

व काढकोन चौकोन क्षेत्रफल = ६ × ८ = ४८ हें उत्तर.

उदाहरणम्—क्षेत्रस्य यस्य वदनं मदनारितुल्यं विश्वं-
भरादिगुणितेन मुखेन तुल्या ॥ बाहू त्रयोदशनखप्रमितौ
च लंबः सूर्योन्मितश्च गणितं वद तत्र किं स्यात् ॥

अर्थ—ज्या समांतर द्विभुज चतुरस्राचें मुख (वरची बाजू)
११ व भूमि (खालची बाजू) २२ आणि अन्यदोन भुज
१३।२० आहेत. व लंब १२ आहे त्या चतुरस्राचें क्षेत्रफल
काय तें सांग ?

उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{१२ (११ + २२)}{२}$$

∴ क्षेत्रफल = १९८ हें उत्तर.

उदाहरणम्—पंचाशदेकसहिता वदनं यदीयं भूः पंच-
सप्ततिमिता च भितोऽष्टषष्ट्या ॥ सव्यो भुजो द्विगुण-
विंशतिसंभितोऽन्यस्तास्मिन्फलं श्रवणलंबमितीः प्रचक्ष्व ॥

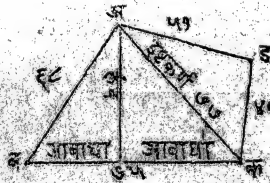
अर्थ—विषमभुज चतुरस्राची एक बाजू ५१ दुसरी बाजू
७५ तिसरी बाजू (सव्यभुज) ६८ व चवथी बाजू (दक्षि-
णभुज) ४० आहे याचें क्षेत्रफल, कर्ण व लंब यांचीं मातें सांग ?

(१६४)

हैं उदाहरण सोडविण्यास पुढील सहा श्लोकांचा संबंध आहे त्यांचा अर्थ करीत असतां हैं सोडवूं.

श्लोक--ज्ञातेऽवलंबे श्रवणः श्रुतौ तु लंबः फलं स्यान्नियतं हि तत्र ॥ चतुर्भुजांतस्त्रिभुजेऽवलंबः प्राग्बद्धजो कर्णभुजौ मही भूः

अर्थ—विषमभुज चतुरस्रामध्ये लंब दिला असतां कर्णाची किंमत काढितां येते व कर्ण समजला असतां लंब काढितां येतो. वर दिलेल्या उदाहरणांमध्ये कर्ण दिला नाही व लंबही दिला नाही ह्याणून दिलेल्या चतुरस्राचें क्षेत्रफल निश्चित सांगतां येणार नाही जेथे कर्ण किंवा लंब दिला असतो तेथेच निश्चित फल सांगतां येतें करितां कर्णाची इष्ट किंमत धरून दिलेल्या चतुरस्रामध्ये कर्णाच्या योगानें जें त्र्यस्र बनेल त्यांतील लंबाची किंमत आणून दाखवितो या त्र्यस्रामध्ये कर्ण व सव्य बाजू हे दोन भुज व खालची बाजू ही भूमि धरून लंब आणावा जसे



येथें इष्ट कर्ण ७७ धरून अ व क त्रिकोणांतील आबाधा व लंब यांच्या किंमती (त्रिभुजे भुजयोर्योग इत्यादि श्लोक रीतीनें) काढिल्या, त्या

$$\text{आबाधा} = \frac{१४४}{९}$$

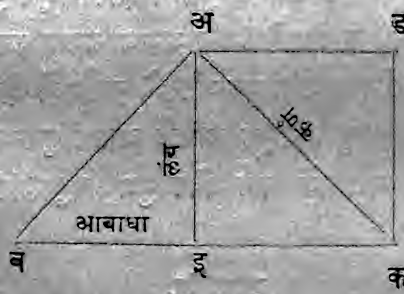
$$\text{आबाधा} = \frac{२३१}{९}$$

$$\text{व लंब} = \frac{३०८}{९} \text{ हें उत्तर}$$

श्लोक—यलंबलंबाश्रितबाहुवर्गविश्लेषमूलं कथिताऽवधा
सा ॥ तदूनधूवर्गसमन्वितस्य यलंबवर्गस्य पदं स कर्णः ॥

अर्थ—विषमभुजचतुरस्रांतील लंब दिला असतां कर्ण काढण्याची रीति लंब व लंबाश्रित भुज यांच्या वर्गांच्या अंतराचें वर्गमूल काढिलें असतां आबाधा येते. ती आबाधा भूमि-तून वजा करून शेषाच्या वर्गामध्यें लंबाचा वर्ग मिळवावा म्हणजे कर्णाची किंमत येते.

उपपत्ति.



येथें व क = भूमि

लंब = ल

व ई = आ

अ व = म

अशा संज्ञा देऊन

म - ल = आ

∴ आ = $\sqrt{\text{म} - \text{ल}}$

(१५६)

$$\therefore (\text{भूमि} - \text{आ})^2 + \text{ले}^2 = \text{कर्ण}^2$$

$$\therefore \text{कर्ण} = \sqrt{ (\text{भूमि} - \text{आ})^2 + \text{ले}^2 }$$

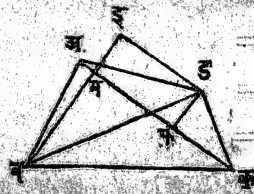
ह्मणून इष्टमूत्रसिद्धि झाली.

श्लोक— इष्टोऽत्र कर्णः प्रथमं प्रकल्प्य ह्यस्ये तु कर्णो-
भयतः स्थिते ये ॥ कर्णं तयोः क्षमामितरौ च बाहू प्रक-
ल्प्य लंबावबधाश्च साध्याः ॥ आबाधयोरेकककुप्स्थयो-
र्यत्स्यादंतरं तत्कृतिसंयुतस्य ॥ लंबैक्यवर्गस्य पदं द्वितीयः
कर्णो भवेत्सर्वचतुर्भुजेषु ॥

अर्थ—विषमभुजचतुरस्त्रांतील दुसरा कर्ण काढण्याची रीति.

प्रथम इष्टकर्ण कल्पून त्या कर्णाने चतुरस्त्रांत जे दोन त्रिकोण
होतील. त्या मध्ये इष्ट कर्णास भूमी व इतर बाजूस भुज कल्पना
करून त्या दोन्ही त्रिकोणाचे लंब व अबाधा तयार कराव्या. नंतर
एक दिशेच्या दोन आबाधांच्या अंतराचे वर्गामध्ये दोन लंबांच्या
बेरजेचा वर्ग मिळवून वर्गमूळ काढिलें असतां दुसऱ्या कर्णाची
किंमत येते. याप्रमाणें सर्व विषमभुज चतुरस्त्रांतील दुसरा
कर्ण काढावा.

उपपत्ति.



अ व क ड या चतुरस्त्रांत अ क हा इष्ट कर्ण, यावर
ड फ आणि व म हे दोन लंब काढिले आहेत व व म हा लंब

इ विदूषयंत असा वाढविला आहे कीं, फ ड आणि म ई ह्या बाजू सारख्या होतील. यांत अ व क त्रिकोणाच्या व म लंबानें अ म ही आबाधा झाली, आणि अ ड क त्रिकोणाच्या ड फ लंबानें अ फ ही आबाधा झाली; या दोन्ही आबाधा एक-दिवेच्या आहेत. यांचें अंतर म फ बाजू ही ई ड बाजूवरोबर आहे आणि दोन्ही लंब व म आणि फ ड यांची बेरीज ही व ई बाजूवरोबर आहे

$$\therefore वई + इड = वड$$

$$\therefore (वम + मइ)^2 + (अफ - अम)^2 = वड^2$$

$$\therefore वड = \sqrt{(वम + मइ)^2 + (अफ - अम)^2}$$

$$\therefore कर्ण = \sqrt{\text{लंबैक्यं} + \text{एक दिक्स्थ आबाधांतर}^2}$$

म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

आतां मागील उदाहरणांत ७७ इष्ट कर्ण घेऊन दोन्ही लंब ६० व २४ आणि दोन्ही आबाधा ४९ व ३२ येतात. ह्या किंमती कर्णाच्या सारणीमध्ये ठेवून

$$\text{द्वितीयकर्ण} = \sqrt{(६० + २४)^2 + (४९ - ३२)^2}$$

$$\therefore \text{द्वितीय कर्ण} = ८९ \text{ हें उत्तर}$$

श्लोक—कर्णाश्रितस्वलपभुजैक्यमुर्वी प्रकल्प्य तच्छेष-
भुजौ च बाहू ॥ साध्योऽवलंबोथ तथाऽन्यकर्णः स्वोर्न्याः
कथंचिच्छ्रवणो न दीर्घः ॥ तदन्यलंबान्न लघुस्तथेदं ज्ञात्वे-
ष्टकर्णः सुधिया प्रकल्प्यः ॥ ज्येष्ठे तु कर्णोभयतः स्थिते
ये तयोः फलैक्यं फलमत्र नूनम् ॥

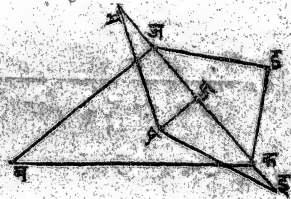
(१५८)

अर्थ—विषमभुज चतुरस्रांत जो इष्टकर्ण कल्पावयाचा आहे तदाश्रित जे दोन लघुभुज यांच्या बेरजेस कल्पित त्रिकोणाची भूमी धरून व दुसऱ्या दोन बाजू हे भुज धरून कल्पित त्रिकोणाचा लंब काढून त्यावरून दुसरा कर्ण तयार करावा. नंतर जो इष्टकर्ण कल्पावयाचा तो कल्पित त्रिकोणाच्या भूमीपेक्षां कमी असावा आणि कल्पित त्रिकोणाच्या लंबावरून जो दुसरा कर्ण येईल त्यापेक्षां अधिक असावा.

चतुरस्रामध्ये कर्णांच्या योगानें जे दोन त्रिकोण होतात त्यांचें पृथक् क्षेत्रफळ काढून बेरीज केली असतां चतुरस्राचें क्षेत्रफळ येतें.

प्रकृत उदाहरणामध्ये कर्णानें केलेलीं जीं दोन त्र्यंखें त्यांची क्षेत्रफळें ९२४ व २३१० येतात म्हणून चतुरस्र क्षेत्रफळ = ३२३४ हें उत्तर.

उपपत्ति.



अ ब क ड या चतुरस्राचा अ क कर्णाश्रित लघु भुज अ ड आणि ड क हे आंत दाबतां दाबतां त्यांची सरळ रेषा म इ ही झाली आणि ब अ आणि ब क ह्या प म, प ई ह्या स्थितीस पोचल्या. म्हणून स्पष्ट दिसून येईल की, अ क ह्या कर्णाची इष्ट किंमत म ई पेक्षां म्हणजे कल्पित त्रिकोणाच्या भूमीपेक्षां

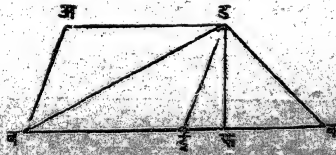
मोठी असतां कामा नये व अन्य कर्ण प फ या पेशां लहान असतां कामा नये म्हणून इष्ट श्लोकाची सिद्धी झाली

श्लोक—समानलंबस्य चतुर्भुजस्य मुखोनभूमिं परिकल्प्य भूमिम् ॥ भुजौभुजौ त्र्यस्रवदेव साध्ये तस्याऽऽवधे लंबमितिस्ततश्च ॥ आबाधयोनाचतुरस्रभूमिस्तलंबवर्गैक्यपदं श्रुतिः स्यात् ॥ समानलंबे लघुदोः कुयोगान्मुखा-
न्यदोः संयुतिरलिपिका स्यात् ॥ =

अर्थ—समांतरद्विभुजचौकोनांतील कर्ण काढण्याची रीति.

समांतर द्विभुज चौकोनामध्ये मुखापेशां भूमि मोठी असते. म्हणून भूमीतून मुख वजा करून जें शेष राहील ती भूमि व चतुरस्राच्या ज्या दुसऱ्या दोन बाजू ह्यांस भुज धरून जें त्र्यस्र होईल त्याची आबाधा व लंब हे आणावेत. नंतर भूमीतून आबाधा वजा करून बाकीच्या वर्गात लंबाचा वर्ग मिळवून वर्गमूळ काढिलें असतां कर्णाची किंमत येते. अशा प्रकारच्या चतुरस्रामध्ये लघुभुज व भूमि यांची बेरीज ही, अन्यभुज व मुखा यांच्या बेरजेपेशां मोठी असते.

उपपत्ति.



या आकृतीमध्ये अ ब क ड ह्या समांतर द्विभुज चौकोनाचा ब ड हा कर्ण काढावयाचा आहे. अ व रेपेशीं समांतर ड ई रेषा काढलेली आहे

येथे अ ड = मुख



(१६०)

ब क = भूमि

ड फ = लंब

फ ल = आवाधा

व ड = कर्ण

ई क = भूमि

अशीं नांवें देऊन

भूमि - मुख = भूमि

(भूमि - आ वा धा)^२ + ल व = कर्ण^२

∴ कर्ण = $\sqrt{(\text{भूमि} - \text{आ वा धा})^2 + \text{लंब}}$

आतां ड ई + ई क > ड क

∴ ड ई + ई क + मुख > ड क + मुख

∴ ड ई + भूमि > ड क + मुख

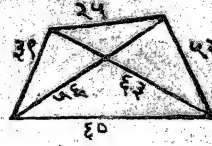
म्हणून इष्टसूत्रसिद्धि झाली.

उदाहरणम्—द्विपंचाशन्मितव्येकचत्वारिंशन्मितौ भुजौ ॥ मुखं तुपञ्चविंशत्या तुल्यं षष्ठ्या मही किल ॥ अतुल्यलंबकक्षेत्रमिदं पूर्वैरुदाहृतम् ॥ षट्पंचाशन्निषष्टिश्च नियते कर्णयोर्मिती ॥ कर्णौतत्रापरौ ब्रूहि समलंबं च तच्छ्रुती ॥

अर्थ—एका विषमभुज चौकोनाचे भुज ५२ व ३९ आहेत. मुख २५ व भूमि ६० आहे आणि दोन्ही कर्ण ५६ व ६३ आहेत. तर याच चारी बाजूंची प्रमाणें घेऊन अन्य कर्ण काढून दुसरा विषमभुज चौकोन बनवून दाखीव ? याच चारी बाजू समांतर द्विभुज चौकोनाच्या मानून लंब व कर्ण प्रमाण काय आहे हें सांग ?

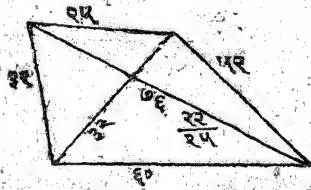
(१६१)

अक्षरनिष्काशनक्रिया



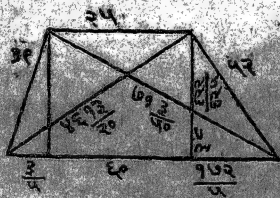
हे दिलेले क्षेत्र आहे यांत ७६ कर्णाचे जागी ३२ इष्टकर्ण धरिले असता त्यावरून मागील पद्धतीने दुसऱ्या कर्णाची किंमत $७६\frac{२३}{३२}$ येते, हे उत्तर.

क्षेत्रदर्शन.



आतां हेच क्षेत्र समांतर द्विभुज चतुरस्र असतां प्रस्तुत श्लोकाच्या रीतीने छत्र $२८\frac{१३}{३२}$ आबाधा $\frac{३}{४}$ व $\frac{१७२}{५}$ व कर्ण $७१\frac{३}{४}$ । $४६\frac{१३}{३२}$ येतात. हे उत्तर.

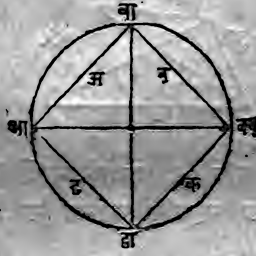
क्षेत्रदर्शन



श्लोक—कर्णाश्रितभुजघातैक्यमुभययान्योन्यभाजितं
गुणयेत् ॥ योगेन भुजप्रतिभुजवधयोः कर्णौ पदे विषये ॥

(१६२)

अर्थ—आकृती काढून समीकरण स्वरूपानें देतो.



$$\text{आ का (कर्ण)} = \sqrt{\frac{(\text{अ. क} + \text{वड})(\text{अड} + \text{वक})}{\text{अव} + \text{कड}}}$$

$$\text{वा डा (कर्ण)} = \sqrt{\frac{(\text{अक} + \text{वड})(\text{अ. व} + \text{कड})}{\text{अड} + \text{वक}}}$$

ही रीति ब्रह्मगुप्तादिकांनीं कोणत्याही विषमचतुरस्रास लाविली. हें बरोबर नाहीं. प्रस्तुत रीति वृत्तांतर्गत चतुरस्राचे कर्ण काढण्यासच उपयोगी पडतें असें समजावें कारण अन्यचतुरस्राचे कर्ण अनियत असतात.

उपपत्ति.

मागे सर्वशेसुतिदलमित्यादि श्लोकाची उपपत्ति दिली आहे त्यांतील समीकरण (३) यांतील कोभु . वा ह्याची किंमत समीकरण (२) मध्ये ठेविली असतां

$$\text{आ का} = \text{क} + \text{ड} + \frac{२ \text{ कड } (\text{अ} + \text{व} - \text{क} - \text{ड})}{२ (\text{अव} + \text{कड})}$$

$$\therefore \text{आ का} = \frac{(\text{अक} + \text{वड})(\text{अड} + \text{वक})}{\text{अव} + \text{कड}}$$

$$\therefore \text{आ का (कर्ण)} = \sqrt{\frac{(\text{अक} + \text{बड})(\text{अड} + \text{बक})}{\text{अब} + \text{कड}}}$$

याच पद्धतीने क्रिया केली असता

$$\text{बा डा (कर्ण)} = \sqrt{\frac{(\text{अ क} + \text{ब ड})(\text{अ ब} + \text{क ड})}{\text{अ ड} + \text{ब क}}}$$

म्हणून इष्टसूत्रासिद्धी झाली.

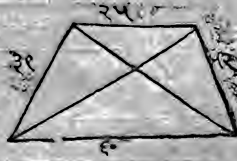
श्लोक—अभीष्टजात्यद्वयबाहुकोटयः परस्परं कर्णहता
भुजा इति ॥ चतुर्भुजं यद्विषमं प्रकल्पितं श्रुती तु तत्र त्रि-
भुजद्वयात्ततः ॥ बाव्होर्वधः कोटिवधेन युक्तस्यादेका श्रुतिः
कोटिभुजावधैक्यम् ॥ अन्या लघौ सत्यपि साधनेऽस्मि-
न्पूर्वैः कृतं यद्वहु तन्न विद्मः ॥

अर्थ—दोन काटकोन त्रिकोण असे कल्पोवेत कीं, त्यांतील एकाच्या भुजकोटीस दुसऱ्याच्या कर्णांने गुणिलें आणि दुसऱ्याच्या भुजकोटीस पहिल्याच्या कर्णांने गुणिलें तर दिलेल्या वृत्तस्थ विषम चतुरस्राच्या चारी बाजू होतील. त्या दोन काटकोन त्रिकोणांतील भुजांच्या गुणाकारांत कोटीचा गुणाकार मिळविला असतां दिलेल्या विषम चतुरस्रांतील कर्णाची किंमत येते. आणि त्या दोन काटकोन त्रिकोणांतील एकाचा भुज व दुसऱ्याची कोटि यांच्या गुणाकारांत दुसऱ्याचा भुज व पहिल्याची कोटि यांचा गुणाकार मिळविला असतां चतुरस्रांतील दुसऱ्या कर्णाची किंमत येते. असे कर्ण आणण्याचें सोपें साधन असतां पूर्वाचार्यांनी कर्ण साधनाविषयीं महाप्रयत्न केला त्याचें कारण काय असेल तें असो.

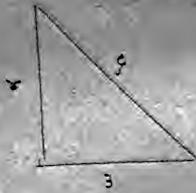
आतां ही रीति स्पष्ट समजण्याकरितां कल्पित उदाहरण देऊं.



(१३४)



हैं दिखेलें चतुरस्र आहे यांतील कर्णांच्या किंमती काढा :



हें दोन काटकोन त्रिकोण कल्पिले.

$$\text{यांत } ४ \times १२ = १२$$

$$३ \times १२ = ३६$$

$$१२ \times ९ = ६०$$

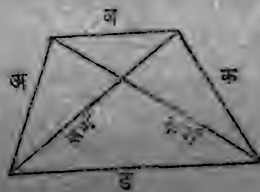
$$९ \times ९ = २९$$

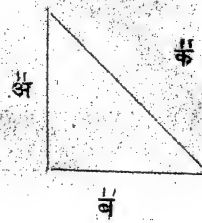
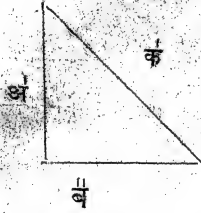
या प्रमाणें चतुरस्राच्या बाजू आहेत

$$\therefore ४ \times १२ + ३ \times ९ = ६३ \text{ कर्ण हें उत्तर}$$

$$३ \times १२ + ४ \times ९ = ९६ \text{ कर्ण हें उत्तर}$$

उपपत्ति.





येथे $\text{अ} \times \text{क} = \text{क}$

$\text{ब} \times \text{क} = \text{अ}$

$\text{अ} \times \text{क} = \text{ड}$

$\text{ब} \times \text{क} = \text{ब}$

या प्रमाणे दिलेले आहे,

वरील दोन त्रिकोण काटकोन आहेत

$\therefore \text{अ} + \text{ब} = \text{क} \dots\dots\dots (१)$

$\text{अ} + \text{ब} = \text{क} \dots\dots\dots (२)$

आतां मागे कर्णाश्रित भुजघातैक्य मित्यादि श्लोकाची उप-
पत्ति दिली आहे त्यांतील अखेरचे समीकरण घेऊन

$$\text{कर्ण} = \sqrt{\frac{(\text{अ} \cdot \text{क} + \text{ब} \cdot \text{ड}) (\text{अड} + \text{बक})}{\text{अब} + \text{कड}}}$$

यांत आरंभो दिलेल्या किंमती ठेऊन

$$\text{कर्ण} = \sqrt{\frac{(\text{अ.क.बक} + \text{अ.क.बक}) (\text{बकअक} + \text{अकबक})}{\text{बकबक} + \text{अकअक}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{अबकअक} + \text{अकबबक} + \text{अकबक} + \text{अकबक} + \text{अकबक} + \text{अकबक}}{\text{बकबक} + \text{अकअक}}}$$



(१६१)

येथें अंशच्छेदांस कं . कं ह्यानें भागून

$$\begin{aligned} \text{कर्ण} &= \sqrt{\frac{\overset{1}{\text{अ}}\overset{2}{\text{व}}\overset{3}{\text{क}}\overset{4}{\text{अ}} + \overset{1}{\text{अ}}\overset{2}{\text{क}}\overset{3}{\text{व}}\overset{4}{\text{व}} + \overset{1}{\text{अ}}\overset{2}{\text{क}}\overset{3}{\text{व}}\overset{4}{\text{अ}} + \overset{1}{\text{अ}}\overset{2}{\text{व}}\overset{3}{\text{अ}}\overset{4}{\text{क}}}{\overset{1}{\text{व}}\overset{2}{\text{व}} + \overset{1}{\text{अ}}\overset{2}{\text{अ}}}} \\ &= \sqrt{\frac{\overset{1}{\text{अ}}\overset{2}{\text{अ}}(\overset{3}{\text{व}}\overset{4}{\text{क}} + \overset{3}{\text{व}}\overset{4}{\text{क}}) + \overset{1}{\text{व}}\overset{2}{\text{व}}(\overset{3}{\text{अ}}\overset{4}{\text{क}} + \overset{3}{\text{अ}}\overset{4}{\text{क}})}{\overset{1}{\text{व}}\overset{2}{\text{व}} + \overset{1}{\text{अ}}\overset{2}{\text{अ}}}} \end{aligned}$$

येथें कं आणि कं ह्यांच्या किंमती

समीकरण (१) व (२) यावरून घेऊन

$$\text{कर्ण} = \sqrt{\frac{2\overset{1}{\text{अ}}\overset{2}{\text{अ}}\overset{3}{\text{व}}\overset{4}{\text{व}}(\overset{3}{\text{व}}\overset{4}{\text{व}} + \overset{3}{\text{अ}}\overset{4}{\text{अ}}) + \overset{1}{\text{व}}\overset{2}{\text{व}}\overset{3}{\text{अ}}\overset{4}{\text{अ}}(\overset{3}{\text{अ}}\overset{4}{\text{अ}} + \overset{3}{\text{व}}\overset{4}{\text{व}}) + \overset{1}{\text{अ}}\overset{2}{\text{अ}}\overset{3}{\text{अ}}\overset{4}{\text{व}}(\overset{3}{\text{अ}}\overset{4}{\text{अ}} + \overset{3}{\text{व}}\overset{4}{\text{व}})}{\overset{1}{\text{अ}}\overset{2}{\text{अ}} + \overset{1}{\text{व}}\overset{2}{\text{व}}}}$$

$$\therefore \text{कर्ण} = \sqrt{2\overset{1}{\text{अ}}\overset{2}{\text{अ}}\overset{3}{\text{व}}\overset{4}{\text{व}} + \overset{1}{\text{व}}\overset{2}{\text{व}}\overset{3}{\text{अ}}\overset{4}{\text{अ}} + \overset{1}{\text{अ}}\overset{2}{\text{अ}}\overset{3}{\text{अ}}\overset{4}{\text{व}}}$$

$$\therefore \text{कर्ण} = \sqrt{(\overset{1}{\text{व}}\overset{2}{\text{अ}} + \overset{1}{\text{अ}}\overset{2}{\text{व}})^2}$$

$$\therefore \text{कर्ण} = \overset{1}{\text{व}}\overset{2}{\text{अ}} + \overset{1}{\text{अ}}\overset{2}{\text{व}}$$

याच प्रमाणें दुसरा कर्ण आणण्याकरितां क्रिया केली असतां

$$\text{कर्ण} = \overset{1}{\text{अ}}\overset{2}{\text{अ}} + \overset{1}{\text{व}}\overset{2}{\text{व}}$$

म्हणून इष्टश्लोकसिद्धि झाली.

श्लोक—क्षेत्रे यत्र शतत्रयं क्षितिमितिस्तत्त्र्यंशुतुल्यं मुखं
बाहू खोत्कृतिभिः शरातिधृतिभि स्तुल्यौ च तत्र श्रुती ॥
एका खाष्टयमैः समा तिथिगुणैरन्याऽथ तलंबकौ ॥ तुल्यौ
गोधृतिभिस्तथा जिनयमै र्योगाच्छ्रो लंबयोः ॥ तत्खंडे
कथयाधरे श्रवणयोर्योगाच्च लंबावधास्तत्सूची निजमार्ग-
वृद्धभुजयोर्योगेन या स्यात्ततः ॥ साबाधं बत लंबकं च
भुजयोः सूच्याः प्रमाणे च के सर्वे गणितिक प्रचक्ष्व
नितरां क्षेत्रेऽव दक्षोऽसि चेत् ॥

(१६७)

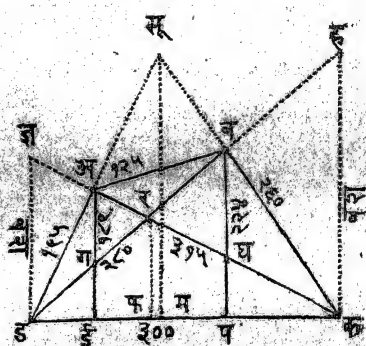
अर्थ—एका विषमभुज चतुरस्रांतील भूमि ३०० मुख
१२५ सव्यभुज १२५ दक्षिणभुज २६० लघुकर्ण २८० दुसरा
कर्ण ३१५ लघु लंब १८९ दुसरा लंब २२४ अशीं मानें
आहेत तर कर्ण व लंब यांच्या छेदनानें खालच्या बाजूस जें
कर्ण खंड व लंब खंड होईल त्यांचीं मानें सांग ? दोन कर्णांच्या
छेदन बिंदूपासून भूमीवर लंब काढिला असतां भूमीचीं जीं दोन
खंडे (आबाधा) होतील त्यांचीं मानें लंबाचें मान सांग ?
चतुरस्राचे दोन्ही भुज वाढवून ज्या ठिकाणीं मिळतील त्या
बिंदूस सूची म्हणतात त्या सूचीपासून भूमीवर काढलेला लंब
तत्संबंधी आबाधा व वाढवून झालेले भुज यांचीं मानें काय
आहेत तीं सांग ?

हे उदाहरण सोडविण्यास पुढील सहा श्लोकांची अपेक्षा
आहे करितां त्या श्लोकांचा अर्थ व उपपत्ति देतांना हे उदा-
हरण सोडवून दाखवूं—

श्लोक—लंबतदाश्रितबाहोर्ध्वं संध्याख्यमस्य लंब-
स्य ॥ संध्यूना भूः पीठं साध्यं यस्याधरं खंडम् ॥ तत्सं-
धिर्द्विष्टः परलंबश्चगणाहतोऽन्यपीठेन ॥ भक्तोलंबश्चतुर्थो-
गात्स्यातामधःखंडे ॥

अर्थ—लंब व लंबाश्रितभुज यांच्या मध्यास “ लंबाचा
संधि ” असें म्हणतात. व भूमीमध्ये संधि वजा करून जे शेष
राहतें त्यास “ पीठ ” असें म्हणतात. ज्या लंब संबधाचीं
अधःखंडे साधावयाचीं आहेत त्या लंबाचा संधि दोन ठिकाणीं
मांडून त्यास परलंब व कर्ण यांनीं गुणावें व अन्यपीठानें मागिलें
असतां क्रमानें लंबखंड व कर्णखंड हीं येतात.

उपपत्ति.



$$\frac{\text{ड ई}}{\text{ग ई}} = \frac{\text{ड प}}{\text{प ब}}$$

$$\therefore ग ई = \frac{ड ई \times प व}{ड प}$$

$$\therefore \text{लंबखंड} = \frac{\text{संघि} \times \text{परलंब}}{\text{पीठ}} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{g}{h} = \frac{b}{h}$$

$$\therefore \text{गड} = \frac{\text{डई} \times \text{बड}}{\text{डप}}$$

$$\therefore \text{कर्णखंड} = \frac{\text{संधि} \times \text{कर्ण}}{\text{पीठ}} \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\text{क प}}{\text{प घ}} = \frac{\text{क ई}}{\text{ई अ}}$$

$$\therefore \text{प व} = \frac{\text{क प} \times \text{ई अ}}{\text{क ई}}$$

$$\therefore \text{द्वितीयलंबखंड} = \frac{\text{अन्यसंवि} \times \text{अन्यलंब}}{\text{अन्य पीठ}} \dots\dots\dots(३)$$

$$\frac{\text{व क}}{\text{क प}} = \frac{\text{अ क}}{\text{ई क}}$$

$$\therefore \text{व क} = \frac{\text{क प} \times \text{अ क}}{\text{ई क}}$$

$$\therefore \text{द्वितीयकर्णखंड} = \frac{\text{अन्यसंवि} \times \text{अन्यकर्ण}}{\text{अन्य पीठ}} \dots\dots\dots(४)$$

म्हणून समीकरण (१), (२), (३), व (४)

यापासून इष्टश्लोकसिद्धि झाली.

वरील समीकरणामध्ये दिलेल्या किंमती ठेवून

$$\left. \begin{array}{l} \text{लंब खंड} = १४ \\ \text{कर्ण खंड} = ८० \\ \text{अन्य लंब खंड} = ९९ \\ \text{अन्य कर्ण खंड} = १६९ \end{array} \right\} \text{हैं उत्तर.}$$

श्लोक—लंबौ भूधौ निजनिजपीठविभक्तौ च वंशौ
स्तः ॥ ताभ्यां प्राग्वच्छ्रुत्योर्योगालंबः कुखंडे च ॥

अर्थ—लंबास भूमीने गुणून आपापल्या पीठांने भागिले
असता वंशाच्या किंमती येतात. नंतर त्या वंशापासून “अन्यो-
न्यमूलाग्रसूत्रयोगाद्विष्वोर्वधे योगहते च लंबः” या मार्गे गेलेल्या
श्लोकपद्धतीने लंब आणावा व त्यापासून आबाभाही काढाव्या.

(१७०)

उपपत्ति.

$$\frac{\text{ड प}}{\text{प व}} = \frac{\text{ड क}}{\text{क ह}}$$

$$\therefore \text{क ह} = \frac{\text{प व} \times \text{ड क}}{\text{ड प}}$$

$$\therefore \text{वंश} = \frac{\text{लंब} \times \text{भूमि}}{\text{पीठ}} \dots\dots\dots (१)$$

$$\frac{\text{क ई}}{\text{अ ई}} = \frac{\text{क ड}}{\text{ड इ}}$$

$$\therefore \text{ड इ} = \frac{\text{अ ई} \times \text{क ड}}{\text{क ई}}$$

$$\therefore \text{अन्य वंश} = \frac{\text{अन्य लंब} \times \text{भूमि}}{\text{अन्य पीठ}} \dots\dots\dots (२)$$

∴ म्हणून इष्ट श्लोकसिद्धि झाली.

वरील दोन्ही समीकरणामध्ये दिलेल्या किंमती ठेवून

वंश ९९९।४०० बापासून लंब १४४ व भूमिसह १०८
१९२ हे उत्तर.

श्लोक—लवहृतो निजसंधिः परलंबगुणः समावृह्यो
ज्ञेयः ॥ समपरसंध्योरैक्यं हारस्तेनोद्धृतौ तौ च ॥ समपर-
संधी भूजौ सूच्याबाधे पृथक्स्याताम् ॥ हाग्रहतः परलंबः
सूचीलंबो भवेद्भूजः ॥ सूचीलंबग्रभूजौ निजनिजलंबोद्धृतौ
भूजौ सूच्याः ॥ एवं ज्ञेयसौदः मार्गैस्त्रैराधिकात्क्रियते ॥

अर्थ—लंबाने आपल्या संधीस सांगून परलंबाने गुणाने त्या
गुणाकारास "सम" अशी संज्ञा आहे. आणि सातसंज्ञा-

मध्ये पर संधि मिळवून जी बेरीज होईल तिहा "हार" ही संज्ञा द्यावी. नंतर समसंज्ञक व परसंधि यांचा पृथक् भूमीने शुणून हाराने भागिले असता सूचिलेबाच्या संबंधाच्या दोन्ही आवाधा येतात.

परलंबास हाराने भागून भूमीने गुणिले असता सूचीलंबाची किंमत येते.

सूचीलंबाने चतुरस्राच्या दोन्ही भुजांस पृथक् शुणून आपापल्या लंबाने भागिले असता सूचीपर्यंत वाढविलेल्या भुजांची किंमत येते.

ह्या सूचिक्षेत्र संबंधाच्या सर्व रीती फक्त त्रैराशिकावरून निघतात.

उपपत्ति.



येथे समसूची लंब = न

अक = ल

बड = क

इक = ग

इफ = स

ईम = क्ष

मफ = य



(१७२)

ईफ = भू

अई = भु

वफ = बु

आप्रमाणें संज्ञा ठेवून

$$\frac{\text{श}}{\text{ल}} = \frac{\text{क्ष}}{\text{न}} \dots\dots\dots (१)$$

$$\frac{\text{स}}{\text{ळ}} = \frac{\text{य}}{\text{न}} \dots\dots\dots (२)$$

ह्या दोन समीकरणांच्या बेरजेवरून

$$\frac{\text{शळ} + \text{सळ}}{\text{ल.ळ}} = \frac{\text{क्ष} + \text{य}}{\text{न}} = \frac{\text{भू}}{\text{न}}$$

$$\therefore \text{न} = \frac{\text{ल.ळ.भू}}{\text{शळ} + \text{सळ}} \dots\dots\dots (३)$$

ही किंमत समीकरण (१) मध्ये ठेवून

$$\frac{\text{श}}{\text{ल}} = \frac{\text{क्ष. (शळ + सळ)}}{\text{ल.ळ.भू.}}$$

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{\text{श.ळ.भू.ल}}{\text{ल (शळ + सळ)}} \dots\dots\dots (४)$$

आतां समीकरण (२) मध्ये (३) मधील किंमत ठेऊन

$$\frac{\text{स}}{\text{ळ}} = \frac{\text{य (शळ + सळ)}}{\text{ल.ळ.भू.}}$$

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{स.ळ.भू.ळ}}{\text{ळ (शळ + सळ)}} \dots\dots\dots (५)$$

$$\frac{\text{शळ}}{\text{ल}} = \text{समसंज्ञा}$$

सम + स = हारसंज्ञा देऊन समीकरण (४) वरून

$$स = \frac{सम \times मू}{हार} = आवाधा$$

याच पद्धतीने

$$य = \frac{स \times मू}{हार} = आवाधा$$

समीकरण (३) मध्ये हारसंज्ञा देऊन

$$न = \frac{ळ \times मू}{हार}$$

$$\therefore सूचीलंब = \frac{पलंब \times मूमि}{हार}$$

$$\frac{ळ}{बु} = \frac{न}{सफ}$$

$$\therefore सफ = बृहत्भुज = \frac{बु \cdot न}{ळ}$$

$$\frac{ल}{भु} = \frac{न}{सई}$$

$$\therefore सई = अन्यबृहत्भुज = \frac{भु \cdot न}{ल}$$

म्हणून इष्टश्लोकसिद्धि झाली.

वरील समीकरणांमध्ये प्रकृत दाहरणांत दिलेल्या किंमती ठेवून

$$\text{आवाधा} \frac{३९६४}{१७} \mid \frac{१९३६}{१७} \text{ सू } \frac{६०४८}{१७}$$



(१७४)

आण भुज्जुन $\frac{१११०}{१७} \mid \frac{७०२०}{१७}$ हे उत्तर

सूत्र—व्यास भनंदाभिहिते विभक्ते खवाजसूत्रेः परि-
विस्तु सूत्रम् ॥ द्वाविंशतिघ्ने विस्तृतेऽथ शैलेः स्थूलोऽथवा
स्पाव्यवहारयोग्यः ॥

अर्थ—व्यासास ११२७ नीं गुणून १२१० नीं भागिलें
असतां सूक्ष्म परिधि येतो. आण व्यासास १२ नीं गुणून ७
नीं भागिलें असतां व्यवहारास योग्य असा स्थूल परिधि येतो.

उदाहरणम्—विष्कंभमानं किल स घन तत्र प्रमाणं
परिधेः प्रचक्ष्व ॥ द्वाविंशतिर्ये त्परिधिभाणं तज्याससंख्यां
च सखे विचिन्त्य ॥

अर्थ—ज्या वृत्ताचा व्यास ७ अहे त्याचा परिधि काय ?
व ज्या वृत्ताचा परिधि १२ आहे त्याचा व्यास काय हें सांग !

उत्तरनिष्कानक्रिया.

$$\text{परिधि} = \frac{७ \times ३१४७}{१२५०} = १७ \frac{११}{५०} \text{ हे उत्तर.}$$

$$\text{व्यास} = \frac{१२ \times १२५०}{३१४७} = ४ \frac{११}{३१२७} \text{ हे उत्तर.}$$

परिधि.



नर आणवा भिजव घकन एकोक कलांच्या भुजज्या वेळ

त्या सर्वांची बेरीज केली असता वर्तुळाचा परिधि येईल. कारण
जर दिलेल्या आकृतीवरून सहज लक्षांत येईल. की एक कलेची
भुजज्या व एक कलेचे चाप (कंस) समान आहे. म्हणून
एक कलेची भुजज्या घऊन वृत्तांतील २१६०० कलांनी गुणून
परिधि काढू.

भुजज्या १ कला = .०००२९०९

यांस २१६०० नीं गुणून ६.२८१४४०० हा परिधि १
त्रिज्या असतां झाला. तेव्हां परिधीचे व्यासाशीं प्रमाण काढ-
ण्याकरितां आलेल्या परिधीस २ ने भागून ३.१४१५२००
३.१४१५२ = ३.१४१५२ अंशच्छेदांस सुमार ८ ने संक्षेप देऊन
३.१४१५२ हे व्यास परिधिप्रमाण झालें म्हणून इष्टसिद्धि झाली.

सूत्रम्—वृत्तक्षेत्रे परिधिगुणितव्यासपादः फलं यत्-
क्षुण्णं वेदैरुपरि परितः कंदुकस्येव जालम् ॥ गोलस्यैवं
तदपि च फलं पृष्ठजं व्यासनिघ्नं पट्टिर्भक्तं भवति नियतं
गोलगर्भे घनाख्यम् ॥

अर्थ—परिधीने व्यासास गुणून त्याचा चतुर्थीस केला
असतां वर्तुळाचें क्षेत्रफळ येतें.

गोल व्यासाचे शेषथांतून जाणाऱ्या वर्तुळाचें क्षेत्रफळास ४ नीं
गुणिलें असतां गोलाचें पृष्ठफल होतें.

गोलाचे पृष्ठफळास व्यासानें गुणून १ नीं भागिलें असतां
गोलाचें घनफल येतें.

उदाहरणम्—यव्यास स्तरगोमिहः किल फलं क्षेत्रे
समे तत्र किं व्यासः सप्तमितम् यस्य सुमते गोळस्य
तस्यापि किम् ॥ पृष्ठे कंदुकजालसमिधफलं तस्यैव गोळस्य
किं मध्ये ग्रीहं घनं फलं च विमलां चेदस्मि लीलावतीम् ॥



(१७३)

अर्थ— ज्या वर्तुळाचा व्यास ७ आहे त्याचें क्षेत्रफल काय ? ज्या गोलाचा व्यास ७ त्याचें पृष्ठफल काय ? व ज्या गोलाचा व्यास ७ आहे त्याचें घनफल काय हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{परिधि} = \frac{7 \times 3142}{1250} = \frac{21994}{1250}$$

$$\text{वृत्त क्षेत्रफल} = \frac{7}{2} \times \frac{21994}{1250} = \frac{153958}{1250}$$

$$\therefore \text{वृ. क्षे. फ.} = 30 \frac{2423}{5000} \text{ हें उत्तर.}$$

$$\text{गोल पृष्ठफल} = \frac{153958}{1250} \times 2 = \frac{307916}{1250}$$

$$\text{गो. पृ. फ.} = 153 \frac{1103}{1250} \text{ हें उत्तर.}$$

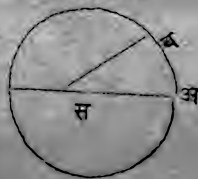
$$\text{गोल घनफल} = \frac{153958}{1250} \times 7 \div 6$$

$$\text{गो. घ. फ.} = \frac{1773538}{2500}$$

$$\text{गो. घ. फ.} = 709 \frac{1789}{2500} \text{ हें उत्तर.}$$

हीं उत्तरे सूक्ष्म आहेत. जर परीधि व व्यास यांचें प्रमाण २२ घेऊन काढिली तर तीं स्थूल येतील.

उपपत्ति.



एक कलेची भुजज्या व एक कलेचें चाप सुमारे समान असतें

(१७७)

झणून स ह्या वृत्त मध्याशीं एक कलाकोन होणारे अ स व ह्या त्रिकोणासारखे २१६०० त्रिकोण करून त्या सर्व त्रिकोणांची क्षेत्रफळे काढून त्यांची बेरीज केली असतां सर्व वर्तुळाचें क्षेत्रफळ येईल.

$$\therefore \frac{\text{लं} \times \text{त्रिज्या}}{२} + \frac{\text{लं} \times \text{त्रि}}{२} + \frac{\text{लं} \times \text{त्रि}}{२} + \dots\dots\dots$$

$$\text{इत्यादि २१६०० पदे} = \frac{\text{त्रि}}{२} (\text{लं} + \text{लं} + \text{लं} + \text{लं} \dots\dots)$$

$$= \frac{\text{त्रि} \times \text{वृत्तपरिधि}}{२} = \frac{\text{व्यास} \times \text{परिधि}}{२ \times २}$$

$$= \frac{\text{व्यास} \times \text{परिधि}}{४} \text{ हे वृत्तक्षेत्रफळ झाले.}$$

म्हणून वृत्तक्षेत्रफळरीतीची उपपत्ति झाली.

सिद्धांत १ ज्या पंचपात्राची उंची व व्यास गोलाच्या व्यासाबरोबर आहे अशा पंचपात्रामध्ये तो गोल ठेविला असतां पंचपात्राच्या घनफळाच्या $\frac{३}{४}$ बरोबर गोलाचें घनफल येतें. हा सिद्धांत प्रत्यक्ष अनुभवानें ठरतो तो असा—पंचपात्रामध्ये मृत्तिकेचा गोल ठेवून त्या पंचपात्राचे तीन भाग करून खुणा करान्या नंतर तो गोळा फोडून सारखा पंचपात्रामध्ये बसविला तर पंचपात्राचा एक भाग वरती रिकामा राहतो असें प्रत्यक्ष करून पाहिलें असतां वरील सिद्धांत ठरतो.

सिद्धांत २—पंचपात्राच्या वक्र पृष्ठफलाबरोबर गोलाचें पृष्ठफल येतें.

हा सिद्धांत, पंचपात्राच्या पृष्ठफलाबरोबरचें एक फडकें

(७८)

केवल ते गोलावर बसविले असता ते गोलास पुरते या प्रत्यक्ष
कृतीवरून उरता.

३. या परिधिच्या प्रमाणास "गु" हें नांव देऊन
पंचपात्राच्या वक्रपृष्ठाची लांबी = २ त्रि. गु आणि २
त्रि = पंचपात्राच्या वक्रपृष्ठाची रुंदी.

पंचपात्र उभे तिरके असता समांतर भुज चौकोन होतो.
तेव्हा त्याच्या लांबी रुंदीचा गुणाकार केला क्षणजे पंचपात्राचे
वक्रपृष्ठ चे क्षेत्रफल होईल.

$$\therefore \text{पंचपात्र पृष्ठफल} = २ \text{ त्रि. गु.} \times २ \text{ त्रि. गु.}$$

$$= ४ \text{ त्रि.}^२ \text{ गु.}$$

$$= \frac{\text{परिधि} \times \text{व्यास}}{४} \times ४$$

अणूत सिद्धांत २ वरून

गोलपृष्ठफल = ४ × वृत्तक्षेत्रफल.

अणूत पृष्ठफलरीती ११ सिद्धि झाली.

पंचपात्राच्या वक्रपृष्ठफळाम उंचीने क्षणजे गोलव्यासाचे
गुणिले असता पंचपात्राचे घनफल होईल.

$$\therefore \text{पंचपात्राचे घनफल} = \text{त्रि.}^३ \text{ गु} \times \text{व्यास}$$

अणूत सिद्धांत २ वरून

$$\text{गोल घनफल} = \frac{\text{त्रि.}^३ \text{ गु} \times \text{व्यास} \times २}{३}$$

$$= \frac{\text{त्रि.}^३ \text{ गु} \times \text{व्यास} \times २ \times २}{३ \times ३}$$

$$= \frac{\text{त्रि. गु} \times \text{व्या}}{६}$$

$$= \frac{\text{गोल पृष्ठफल} \times \text{व्या}}{६}$$

द्वगुण संपूर्ण इष्ट सूत्रसिद्धी माली.

सूत्रम्—व्यासस्य वर्गे भनवाग्निनिघ्ने एष्टम् फलं पंच-
सहस्रभक्ते ॥ रुद्राहते शक्रहृत्तेऽथवा स्यात्सूत्रं फलं संव्य-
वहारयोग्यम् ॥ धनीकृतव्यासदलं निजैकविंशशयुग्मो-
लफलं धनं स्यात् ॥

अर्थ—वर्तुळाच्या व्यासाच्या वर्गास ३९२७ नीं गुणून
५००० नीं भागिले असतां वर्तुळाचें क्षेत्रफल सूक्ष्म येतें.

वर्तुळाच्या व्यासाच्या वर्गास ११ नीं गुणून १४ नीं
भागिले असतां वर्तुळाचें क्षेत्रफल स्थूल येतें.

व्यासाच्या घनाचे अर्धास, व्यासाचे घनाच्या अर्धास २१ नीं
भागून जो भागाकार येईल तो मिळविता असतां गोळाचे घन-
फल होईल.

उपपत्ति.

$$\text{वृत्तक्षेत्रफल} = \frac{\text{परिधि} \times \text{व्यास}}{४}$$

यात परिधि = २ त्रि. मु = २ त्रि × ३.१४१६ ही
किंमत ठेऊन.

$$\text{वृत्तक्षेत्रफल} = \frac{\text{व्यास} \times ३.१४१६ \times \text{व्यास}}{४}$$

$$\text{वृ. क्षेत्र. फ.} = \frac{\text{व्यास}^२ \times ३.१४१६}{४}$$



(१८०)

$$\therefore \text{वृ.क्षे.फ.} = \text{व्या} \times ७८९४$$

$$= \text{व्या} \times \frac{७८९४}{१००००}$$

$$= \text{व्या} \times \frac{३९२७}{९०१०} \dots\dots\dots (१)$$

अथवा अंशच्छेदास ३९७ नें भागून

$$\text{स्थूल वृत्तक्षेत्रफल} = \text{व्या} \times \frac{३९}{११} \dots\dots\dots (२)$$

आतां मागील सूत्राच्या उपपत्तीतील

$$\text{मोळवतफल} = \frac{२ \text{ त्रि. गु} \times \text{व्या}}{३}$$

$$= \frac{२ \text{ व्या. गु. व्या}}{४ \times ३}$$

$$= \frac{२ \text{ व्या. } २२}{४ \times ३ \times ७}$$

$$= \frac{११ \text{ व्या}}{२१} \times \frac{२}{२}$$

$$= \frac{२२ \text{ व्या}}{४२}$$

$$= \frac{२१ \text{ व्या}}{४२} + \frac{\text{व्या}}{२ \times २१} =$$

$$= \frac{\text{व्या}}{२} + \frac{\text{व्या}}{२ \times २१} \dots\dots\dots (३)$$

अणून समाकरण (१) (२) व (३) यांवरून इष्टसिद्धि झाली.

(१८१)

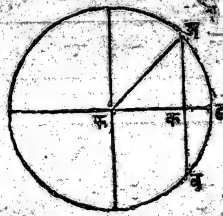
सूत्रम्—व्याख्यासयोगांतरघातमूलं व्यासस्तदनो द-
लितः शरः स्यात् ॥ व्यासाच्छरोनाच्छरसंगुणाच्च मूलं
द्विनिघ्नं भवतीह जीवा ॥ जीवार्धवर्गे शरभक्तयुक्ते
व्यासप्रमाणं प्रवदंति वृत्ते ॥

अर्थ—व्यासांतून ज्या वजा करून जी बाकी राहील ती,
व व्यासांत ज्या मिळवून जी बेरीज होईल ती, ह्यांचा गुणाकार
करून वर्गमूळ काढावें. नंतर तें मूळ व्यासांतून वजा करून अर्ध
केलें असता शराची किंमत येते.

व्यासांतून शर वजा करून जी बाकी राहील तिला शरानें
गुणून वर्गमूळ काढावें. त्या वर्गमूळाची दुप्पट केली असता
ज्या येते.

ज्येच्या अर्धाच्या वर्गास शरानें भागून शर मिळविला तर
व्यास येतो.

उपपत्ति.



येथें अफ = त्रिज्या = त्रि

अव = ज्या

कड = शर = श

कफ = क्ष

याप्रमाणें संज्ञा देऊन

$$\begin{aligned} \text{क्ष} &= \sqrt{\text{त्रि}^2 - \left(\frac{\text{ज्या}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4 \text{ त्रि}^2 - \text{ज्या}^2}{4}} \end{aligned}$$

उभय पक्षांचा वर्ग करून

$$\text{क्ष}^2 = \frac{4 \text{ त्रि}^2 - \text{ज्या}^2}{4}$$

$$\text{क्ष}^2 = \frac{\text{व्या}^2 - \text{ज्या}^2}{4}$$

$$4 \text{ क्ष}^2 = \text{व्या}^2 - \text{ज्या}^2$$

$$4 \text{ क्ष}^2 = (\text{व्या} + \text{ज्या}) (\text{व्या} - \text{ज्या})$$

$$2 \text{ क्ष} = \sqrt{(\text{व्या} + \text{ज्या}) (\text{व्या} - \text{ज्या})}$$

यांत क्ष = त्रि - श ही किंमत ठेवून

$$2 (\text{त्रि} - \text{श}) = \sqrt{(\text{व्या} + \text{ज्या}) (\text{व्या} - \text{ज्या})}$$

$$2 \text{ त्रि} - 2 \text{ श} = \sqrt{(\text{व्या} + \text{ज्या}) (\text{व्या} - \text{ज्या})}$$

$$\therefore \text{श} = \frac{\text{व्या} - \sqrt{(\text{व्या} + \text{ज्या}) (\text{व्या} - \text{ज्या})}}{2} \dots (1)$$

आतां रेखागणिताच्या तृतीयाध्यायातील ३५ व्या सिद्धांतावरून

$$(\text{व्या} - \text{श}) \text{ श} = \frac{\text{ज्या}}{2} \times \frac{\text{ज्या}}{2} = \left(\frac{\text{ज्या}}{2}\right)^2$$

$$\therefore \text{ज्या} = \sqrt{(\text{व्या} - \text{श}) \text{ श}} \times 2 \dots (2)$$

$$\text{आणि } \text{व्या} - \text{श} = \frac{\left(\frac{\text{ज्या}}{2}\right)^2}{\text{श}}$$

(१८३)

$$\text{व्या} = \frac{\left(\frac{\text{ज्या}}{२} \right)^2}{२} + २ \dots\dots\dots (३)$$

द्वयून समीकरण (१), (२), (३) या वरून इष्टसिद्धि झाली.

उदाहरणम्—दशविस्तृतिवृत्तांतर्यत्रज्या षण्मिता सखे ॥
तत्रेषु वद बाणाज्ज्यां ज्याबाणाभ्यां च विस्तृतिम् ॥

अर्थ—ज्याचा व्यास १० आहे अशा वर्तुळांतील ज्या कंसाची ६ आहे त्याचा शर काय? व शरावरून ज्या किती? व ज्या आणि बाण यांपासून वृत्ताचा व्यास किती हें सांग?

उत्तर निष्काशनक्रिया.

$$\text{शर} = \frac{१० - \sqrt{(१० + ६)(१० - ६)}}{२}$$

= १ हें उत्तर

$$\text{ज्या} = \sqrt{(१० - १) \times २} = ६ \text{ हें उत्तर}$$

$$\text{व्या} = \frac{\left(\frac{६}{१} \right)^2}{१} + १ = १० \text{ हें उत्तर}$$

सूत्रम्—त्रिव्यंकाग्निमश्वन्द्वैस्त्रिबाणाष्टयुगाष्टभिः ॥
वेदाग्निपंचखाद्वैश्चखखाभ्राभ्ररसैः क्रमात् ॥ बाणेषुनख-
बाणैश्च द्विद्विनन्देषुसागरैः ॥ कुरामदशवेदैश्च वृत्तव्यासे स-
माहते ॥ खखखाभ्राकंसंभक्ते लभ्यंते क्रमशो भुजाः ॥
वृत्तांतर्यत्रज्यापूर्वाणां नवासांतं पृथक् पृथक् ॥

अर्थ—वृत्त व्यासास १०३९२३, ८४८९३, ७०५३४, ६००००, ५२०५५, ४५९२२, आणि ४१०३१ या अंकांनी क्रमानें गुणून जे गुणाकार येतील त्यांस १२०००० या संख्येनें भागिलें असतां क्रमानें वर्तुळांत काढिलेल्या समभुजत्रिकोण,

(१८४)

समभुजसमकोणचौकोन इत्यादि समभुजसमकोणनवकोणापर्यंत ज्या आकृती होतात त्यांच्या प्रत्येकी निरनिराळ्या बाजू होतात.

उदाहरणम्—सहस्राद्वितयव्यासं यद्वृत्तं तस्य मध्यतः ॥

समन्वयस्त्रादिकानां मे भुजान्वद पृथक् पृथक् ॥

अर्थ—ज्या वृत्ताचा व्यास २००० आहे त्यांत समभुज त्रिकोण, समभुजसमकोणचौकोन, इत्यादि समभुज समकोण नवकोणापर्यंत काढिलेल्या आकृतींच्या प्रत्येकी बाजू मला सांग.

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{समभुज त्रिकोणाची बाजू} = \frac{२००० \times १००३९२३}{१२०००००}$$

$$\therefore \text{समभुज त्रिकोणाची बाजू} = १७३२\frac{१}{२} \text{ हें उत्तर.}$$

$$\text{चौरसाची बाजू} = \frac{२००० \times ४०८५३}{१२०००००} = १४१४\frac{१}{२} \text{ हें उत्तर.}$$

$$\text{पंचकोणाची बाजू} = \frac{२००० \times ७०५३४}{१२०००००} = ११७५\frac{१}{२} \text{ हें उत्तर.}$$

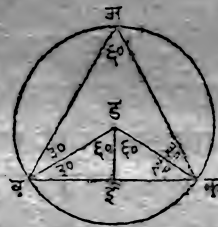
$$\text{षट्कोणाची बाजू} = \frac{२००० \times ६००००}{१२०००००} = १००० \text{ हें उत्तर.}$$

$$\text{सप्तकोणाची बाजू} = \frac{२००० \times ५२०५५}{१२०००००} = ८६७\frac{१}{२} \text{ हें उत्तर,}$$

$$\text{वाच पद्धतीने अष्टकोणाची बाजू} ७६५\frac{१}{२} \text{ हें उत्तर.}$$

$$\text{नव कोणाची बाजू} ६८३\frac{१}{२} \text{ हें उत्तर.}$$

उपपत्ति.



अ व क हा समभुज त्रिकोण आहे याच्या बाजूचें प्रमाण काढणें आहे.

(१८५)

$$\text{ईक} = \text{भुजज्या } ६०^\circ \times \text{त्रि}$$

$$२ \text{ ईक} = २ \text{ त्रि} \cdot \text{भू} \cdot ६०^\circ$$

$$\therefore \text{ज्या} = २ \text{ त्रि} \times \frac{\sqrt{३}}{२}$$

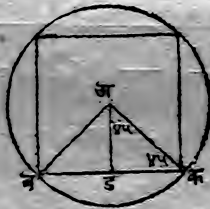
$$\text{ज्या} = \text{त्रि} \sqrt{३}$$

$$= १.७३२००५ \text{ त्रि}$$

$$\text{ज्या} = \frac{१.७३२००५ \text{ व्यास}}{२}$$

$$= \frac{१.७३२००५}{१००००० \times २} \times \frac{६}{६} \text{ व्यास}$$

$$= \frac{१०३९२३ \text{ व्यास}}{१२००००}$$



$$\text{डक} = \text{भुजज्या } ४५^\circ \times \text{त्रि}$$

$$२ \text{ डक} = २ \text{ भू } ४५^\circ \text{ त्रि}$$

$$\therefore \text{ज्या} = २ \text{ त्रि भू } ४५^\circ$$

$$= २ \text{ त्रि} \times \frac{१}{\sqrt{२}} \times \frac{\sqrt{२}}{\sqrt{२}}$$

$$= \frac{२ \text{ त्रि} \cdot \sqrt{२}}{२}$$

(१८६)

$$= \frac{\text{व्या. } १.४१४२१४}{२}$$

$$\therefore \text{ज्या} = \frac{१४१४२१४}{१००००००} \cdot \frac{\text{व्या}}{२} \times \frac{६}{६}$$

$$= \frac{८४८९२ \text{ व्यास}}{१२००००} \text{ सुमारे.}$$

याच पद्धतीने अन्य ज्या साधिल्या असतां सूत्रांतील गुणक व भाजक यांची सिद्धि होते.

सूत्रम्—चापोनाविध्नपरिधिः प्रथमाद्वयः स्यात्पंचा-
हतः परिधिर्गर्भचतुर्थभागः ॥ आद्योनितेन—खलु तेन भजे-
चतुर्ध्नव्यासाह्वं प्रथममाप्तमिह ज्याका स्यात् ॥

अर्थ—समीकरणरूपाने.

$$\text{ज्या} = \frac{४ \text{ व्यास (परिधि-चाप) चाप}}{५ \text{ परिधि}^२} \text{ — (परिधि -- चाप) चाप}$$

उपपत्ति.

(परिधि-चाप). हेंच जीवा (ज्या) मान शून्य चाप असतां आहे हें उघड आहे. कारण शून्य चाप असतां भुजज्याही शून्य असते व (परिधि-चा) चा. या पदाचीही शून्य किंमत होते. यावांचून अन्य चाप असतां वरील (प-चा) चा ह्या पदास ज्या गुणकानें गुणले व ज्या हरानें भागिले असतां जीवामान येईल त्या गुणकाची किंमत क्ष आणि हराची किंमत य—(प-चा) चा अशी कल्पना करून क्षची व यची किंमत काढून जीवेच्या रीतीने स्वरूप कसे येते हें दाखवितों.

वरील घरलेल्या किमतीवरून

(१८७)

$$\text{ज्या} = \frac{\text{क्ष (परिधि - चा) चा}}{\text{य - (परि - चा) चा}} \dots \dots \dots (१)$$

आतां चाप १८० अंशाचे असेल तेव्हां वरच्या समीकरणाचें स्वरूप

$$\begin{aligned} \text{व्यास} &= \frac{\text{क्ष (परिधि - } \frac{\text{परिधि}}{२}) \frac{\text{परिधि}}{२}}{\text{य - (प - } \frac{\text{प}}{२}) \frac{\text{प}}{२}} \\ &= \frac{\text{क्ष प}}{\text{य - } \frac{\text{प}}{२}} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{क्षप} = ४ \text{ य } \cdot \text{व्या} - \text{व्या प} \dots \dots \dots (२)$$

आणि चाप ६० अंशाचे असेल तेव्हां समीकरण (१) चें स्वरूप

$$\begin{aligned} \frac{\text{व्यास}}{२} &= \frac{\text{क्ष (प - } \frac{\text{प}}{६}) \frac{\text{प}}{६}}{\text{य - (प - } \frac{\text{प}}{६}) \frac{\text{प}}{६}} \\ \frac{\text{व्या}}{२} &= \frac{\text{क्ष } \frac{५}{६} \text{ प}}{\text{य - } \frac{५}{६} \text{ प}} \\ \therefore \frac{\text{व्या}}{२} &= \frac{५ \text{ क्ष प}}{३६ \text{ य} - ५ \text{ प}} \end{aligned}$$

$$\therefore १० \text{ क्ष प} = ३६ \text{ य व्या} - ५ \text{ प व्या} \dots \dots (३)$$

आतां (समीकरण) (२) व (३) यांवरून क्षची व यची किंमत काढून

$$\begin{aligned} \text{क्ष} &= ४ \text{ व्या} \\ \text{य} &= \frac{५}{६} \text{ प} \end{aligned}$$

(१८६)

ह्या किमती समीकरण (१) मध्ये ठेवून

$$\text{ज्या} = \frac{४ \text{ व्या (प - चा) चा}}{५ \text{ प} - (\text{प} - \text{चा}) \text{ चा}}$$

∴ लणून इष्टसिद्धि झाली.

उदाहरणम्—अष्टादशांशेन वृतेः समानमेकादिनिघ्नैः
च यत्र चापम् ॥ पृथक् पृथक् तत्र वदाऽऽशु जीवा स्वार्कै-
र्मितं व्यासदलं च यत्र ॥

अर्थ—ज्या वर्तुळाची त्रिज्या १२० आहे त्यांतील परिघा-
च्या ४८, ४८, ४८, ४८ इत्यादि कंसांच्या ज्या काय आहेत
हैं सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\text{परिघ} = \frac{१२० \times २ \times ३१२७}{१२५०} = ७५४ \text{ सुमारे}$$

$$\frac{७५४}{१८} = ४२ \text{ हें चाप.}$$

$$\therefore \text{ व्या} = \frac{४ \text{ व्या (प-चा) चा}}{५ \text{ प} - (\text{प} - \text{चा}) \text{ चा}}$$

यांत वरील किमती ठेवून

$$\text{ज्या} = ४२ \text{ हें उत्तर.}$$

$$\text{तसेच } \frac{७५४ \times २}{१८} = ८४ \text{ ही चापाची किमत ठेवून}$$

$$\text{ज्या} = ८२ \text{ हें उत्तर}$$

इत्यादि उत्तरें काढावीत.

सूत्रम्—व्यासाब्धिघातयुतमौर्विकया विभक्तो जीवांघ्रि-
पंचगुणितः परिधेस्तु वर्गः ॥ लब्धोनितात्परिधिर्वर्गच-
तुर्थभागादात्पे पदे वृत्तिदलात्पतिते धनुः स्यात् ॥

अर्थ—समीकरणरूपानें देऊं

$$\text{चाप} = \frac{\text{परिवि}^2}{२} - \sqrt{\frac{\text{परिवि}^2}{४} - \frac{\frac{५}{४} - \text{ज्या} - \text{परिवि}^2}{४ \text{ व्यास} + \text{ज्या}}}$$

उपपत्ति.

मागील सूत्रावरून

$$\text{ज्या} = \frac{४ \text{ व्यास } (प - चा) चा}{\frac{५}{४} प^2 - (प - चा) चा}$$

$$\therefore ४ \text{ व्यास } (प - चा) चा = \frac{५}{४} प^2 - ज्या - ज्या (प - चा) चा$$

$$\therefore ४ \text{ व्यास } (प - चा) चा + ज्या (प - चा) चा = \frac{५}{४} प^2 ज्या$$

$$चा (प - चा) (४ व्यास + ज्या) = \frac{५}{४} प^2 ज्या$$

$$प. चा - चा^2 = \frac{५ प^2 - ज्या}{१६ व्यास + ४ ज्या}$$

सर्वांची चिन्हे पालटून (प) च्या निमटीचा वर्ग उभय-
पक्षांत मिळवून

$$चा - पचा + \frac{प^2}{४} = \frac{प^2}{४} - \frac{५ प^2 ज्या}{१६ व्यास + ४ ज्या}$$

उभयपक्षांची मूले काढून

$$चा - \frac{प}{२} = + \sqrt{\frac{प^2}{४} - \frac{\frac{५}{४} प^2 ज्या}{४ व्यास + ज्या}}$$

$$\therefore \text{चाप} = \frac{प}{२} + \sqrt{\frac{प^2}{४} - \frac{\frac{५}{४} प^2 ज्या}{४ व्यास + ज्या}}$$

संगून इष्ट सिद्धि झाली.

उदाहरणम्—विदिता इह ये गुणास्ततो वद तेषामधुना



(१९०)

धनुर्मितीः ॥ यदि तेऽस्ति धनुर्गुणक्रिया गणिते गाणति-
कातिनैपुणम् ॥

अर्थ—पूर्वीच्या उदारणामध्ये ज्या जीवा साधल्या आहेत
त्यांचीं चापें (कंस) किती हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

प्रथम ज्या ४२ चा कंस काढूं.

$$\text{चाप} = \frac{प}{२} - \sqrt{\frac{प^२}{४} - \frac{५}{४} \frac{प^२}{४} \frac{ज्या}{व्या + ज्या}}$$

हा समीकरणामध्ये प = ७५४; ज्या = ४२; व्या = २४० हा
किमती ठेवून —

चाप = ४२ हें उत्तर.

याप्रमाणें अन्यचापें आणावीत.

ह्याप्रमाणें क्षेत्रव्यवहार प्रकरणाचें सोपपत्तिक भाषांतर
समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

खातव्यवहार.

सूत्रम्—गणयित्वा विस्तारं बहुषु स्थानेषु तद्युति
र्भाज्या ॥ स्थानकमित्या सममितिरेवं दैर्घ्ये च वेधे च ॥
क्षेत्रफलं वेध गुणं खाते घनहस्तसंख्या स्यात्. ॥

अर्थ—ज्याची लांबी, रुंदी, व उंची ह्या प्रत्येकीं सारख्या नाहींत
अशा एकाद्या खळग्याचें घनफळ काढावाचें असल्यास, त्या खळ-
ग्याची अनेक ठिकाणचीं रुंदी मावून त्यांची बेरीज करावी. नंतर

जितक्या स्थळीं रुंदी मापली असेल त्या स्थान संस्थेने भागिले असतां साधारण मध्यम प्रमाणांची रुंदी येईल. याच पद्धतीने मध्यम प्रमाणाची लांबी व खोली काढवी. नंतर काढलेल्या लांबी रुंदीचा गुणाकार करून त्यास मध्यम खोलीने गुणिले असतां खळण्याचे घनफळ येईल

उदाहरणम्—भुजवक्रतया दैर्घ्यं दशेशार्ककरैर्मितम् ।
त्रिषु स्थानेषु षट्पंच सप्तहस्ता च विस्तृतिः ॥ यस्य
खातस्य वेधोऽपि द्विचतुस्त्रिकरः सखे ॥ तत्र खाते
क्रियंतः स्युर्धनहस्ताः प्रचक्ष्वमे ॥

अर्थ—ज्याच्या बाजू सर्वत्र वांकड्या असलेल्या खळगाची लांबी एके ठिकाणी १० हात, दुसरे ठिकाणी ११ हात व तिसरे ठिकाणी १२ हात लांबी आहे. व त्या तीन ठिकाणी रुंदी क्रमाने ९, ६, ७ हात; आणि खोलीही २, ३, ४ हात आहे तर त्या खळण्याचे घनफळ किती हात आहे हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\frac{१२ + ११ + १०}{३} = ११ \text{ ही साधारण मध्यम प्रमाणाची}$$

लांबी शाली, व

$$\frac{७ + ६ + ५}{३} = ६ \text{ ही मध्यम रुंदी;}$$

$$\text{आणि } \frac{२ + ३ + ४}{३} = ३ \text{ ही मध्यमखोली शाली म्हणून}$$

$$११ \times ६ \times ३ = १९८ \text{ घनफळ शालें हें उत्तर.}$$

उपपत्ति.

तीन ठिकाणी लांब्या निरनिराळ्या असल्यामुळे मध्यमप्रमाणाची लांबी काढली पाहिजे ह्याणून तिन्ही लांब्यांच्या बेरजेस



३ नें भागलें पाहिजे. व याच पद्धतीनें रुंदी व खोलीही काढली पाहिजे. आणि लांबी रुंदीच्या गुणाकारास उंचीनें गुणिलें असतां घनफल येईल हें उघड आहे. ह्मणून इष्टसिद्धी झाली.

सूत्रम्—मुखजतलजसद्युतिजक्षेत्रफलैक्यं हतं षड्भिः ॥
क्षेत्रफलं सममेतद्वेधगुणं घनफलं स्पष्टम् ॥ समखातफलत्र्यंशः सूचीखाते फलं भवति ॥

अर्थ—जिचा पाया चतुष्कोणाकृती, पंचकोणाकृति, इत्यादिकांपैकीं असून भोवतालच्या सर्व बाजूविकोणाकृति असतात. आणि ज्या बाजूचे शिरोबिंदू पायाचे वर एका बिंदूत मिळतात अशा घनाकृतीस “सूचि” ह्मणजे शंकु म्हणतात.

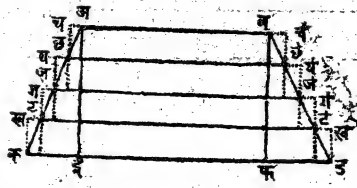
जर पायाशीं समांतर पातळीनें सूचीमध्येच आडवी छेदिनी तर तिचा जो खालच्या बाजूस तुकडा पडतो त्यास “सूचि-खंड” असें म्हणतात.

जी आकृति पायापासून मुखापर्यंत एक सारख्या आकाराची असते तिला “समखात” असें म्हणतात.

सूचिखंडाचें घनफल काढणें झाल्यास, सूचि खंडाच्या पायाचें क्षेत्रफल, सूचिखंडाच्या मुत्राचें क्षेत्रफल, व युतिजक्षेत्रफल (ह्मणजे पायाच्या लांबीत मुखाची लांबी मिळवून जी लांबी होईल ती, व पायाच्या रुंदीत मुखाची रुंदी मिळवून जी रुंदी होईल ती, या लांबीरुंदीपासून जें क्षेत्रफल होईल तें) या तिन्ही क्षेत्रफलांच्या बेरजेस ६ नीं भागून त्यास सूचिखंडाच्या उंचीनें गुणिलें असतां सूचिखंडाचें घनफल येतें.

समखाताच्या घनफलास ३ नें भागिलें असतां सूचीचें घनफल येईल.

उपपत्ति.



अ ब क ड ही आपल्या समोर दिसणारी सूचिखंडाची बाजू आहे असे समजा. अ ई ही सूचिखंडाची उंची आहे. हे सूचिखंड पायाशी समांतर पातळीने टट, जन, छछ, या ठिकाणी छिन्न केले [कापले] असे समजा.

$$\text{आतां अ ब} = \text{म}$$

$$\text{क ड} = \text{त}$$

$$\text{अ ई} = \text{उ}$$

आणि पायाशी समांतर जे कांप काढले आहेत त्यांची प्रत्येकामधील उंची आ आहे असे घेऊन

$$\frac{\text{उ}}{\text{त} - \text{म}} = \frac{\text{आ}}{\text{च अ} + \text{ब च}}$$

$$\therefore \text{च अ} + \text{ब च} = \frac{(\text{त} - \text{म}) \text{आ}}{\text{उ}}$$

$$\text{च अ} + \text{ब च} = \text{ल संज्ञा देऊन}$$

$$\text{ल} = \frac{(\text{त} - \text{म}) \text{आ}}{\text{उ}}$$

$$\therefore \text{म} + \text{ल} = \text{मुज छछ}$$

$$\text{म} + २\text{ल} = \text{मुज ज ज}$$

(१९४)

$$म + ३ ल = भुजं ट ट$$

$\frac{उ}{आ}$ इतके भुज आहेत.

आतां रेखागणिताच्या ई व्या अध्यायांतील सिद्धांत १९ प्रमाणें

$$\frac{\text{भुजं}}{\text{भुजं}} = \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{क्षेत्रफल}}$$

असें आहे यावरून स्पष्ट दिसतें कीं सजातीय क्षेत्रांपैकी एकाच्या क्षेत्रांतील भुजवर्गास ज्या संख्येनें गुणिलें असतां त्याचें क्षेत्रफल येईल त्याच संख्येनें दुसऱ्या क्षेत्राच्या भुजवर्गास गुणिलें असतां दुसऱ्याचें क्षेत्रफल येतें ह्मणून भुजवर्गाचे गुणकास गा ही संज्ञा देऊन या क्षेत्रफळास आ ह्या उंचीनें गुणिलें असतां प्रत्येक समखाताचें घनफल येईल. ह्मणून

$$ललभुजं \times गा \times आ = लललल ह्या समखाताचें घनफल.$$

$$जजभुजं \times गा \times आ = दुसऱ्या समखाताचें घनफल.$$

$$मुं \cdot गा \cdot आ = तृतीय समखात घनफल.$$

इत्यादि $\frac{उ}{आ}$ समखातांचीं घनफले.

∴ सर्व समखात घनफलैक्य = $(मुं + मुं + मुं \dots) \times गा \times आ$
यांत भुजवर्गाच्या किमती ठेवून

$$\text{सर्व समखात घनफलैक्य} = \left\{ (म + ल)^2 + \dots \right\}$$

(१९५)

$$(म + २ ल)^२ + म + ३ ल)^२ + (म + ४ ल)^२$$

$$.... इत्यादि \frac{उ}{आ} पदे \} \times गा \times आ$$

आतां यांतील जीं वर्गपदे आहेत त्यांचे वर्ग करून क्रमानें समीकरण लिहून दाखवितों.

कसांतील पदांचे वर्ग

$$म^२ + २ मल + ल^२$$

$$म^२ + ४ मल + ४ ल^२$$

$$म^२ + ६ मल + ९ ल^२$$

.....
.....

इत्यादि $\frac{उ}{आ}$ पदे आहेत.

यांतील पहिल्या पदांची बेरीज =

$$म + म + म + इत्यादि \frac{उ}{आ} = \frac{म \cdot उ}{आ}$$

दुसऱ्या पदांची बेरीज =

$$२ मल + ४ मल + ६ मल इत्यादि \frac{उ}{आ}$$

$$= २ मल (१ + २ + ३ + ४ + इत्यादि \frac{उ}{आ} पदे)$$

$$= २ मल (\frac{उ}{आ} + १) \frac{उ}{२ आ} = मल (उ + आ) \frac{उ}{आ}$$

आणि तिसऱ्या पदांची बेरीज =

(१९६)

$$\begin{aligned}
 & \text{ले} + ४ \text{ ले} + ९ \text{ ले} + \dots \dots \dots \text{ इत्यादि } \frac{\text{उ}}{\text{आ}} \text{ पदें} \\
 & = \text{ले} (१ + २ + ३ + ४ + \dots \dots \dots \text{ इत्यादि } \frac{\text{उ}}{\text{आ}} \text{ पदें}) \\
 & = \text{ले} \times \frac{\frac{२ \text{ उ}}{\text{आ}} + १}{३} \times \frac{(\text{उ} + \text{आ}) \text{ उ}}{२ \text{ औ}} \\
 & = \text{ले} (२ \text{ उ} + ३ \text{ आ} . \text{ उ} + \text{औ}) \frac{\text{उ}}{६ \text{ औ}}
 \end{aligned}$$

∴ सर्व समखात घनफलैक्य =

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{\text{मै.उ}}{\text{आ}} + \text{मल} (\text{उ} + \text{आ}) \frac{\text{उ}}{\text{औ}} + \text{ले} (२ \text{ उ} + ३ \text{ आउ} + \text{औ}) \frac{\text{उ}}{६ \text{ औ}} \right\} \\
 & \times \text{गा} \times \text{आ} \\
 & = \text{मै.उ.गा} + \text{मल} (\text{उ} + \text{आ}) \frac{\text{उ.गा}}{\text{आ}} + \text{ले} (२ \text{ उ} + ३ \text{ आउ} + \text{औ}) \times \frac{\text{उगा}}{६ \text{ औ}}
 \end{aligned}$$

$$\text{यांत ल} = \frac{(\text{त} - \text{म}) \text{ आ}}{\text{उ}} \quad \begin{array}{l} \text{ही मागें सिद्ध केलेली} \\ \text{किंमत ठेवून} \end{array}$$

$$\text{सर्व समखात घनफलैक्य} = \text{मै. उ. गा} +$$

$$\text{म} (\text{त} - \text{म}) (\text{उ} + \text{आ}) \text{ गा} + (\text{त} - \text{म})^२ (२ \text{ उ} + ३ \text{ आउ} + \text{औ}) \frac{\text{गा}}{६ \text{ उ}}$$

आतां या समीकरणामध्यें आ = ० किंमत धरली असतां सूचिखंडाचें घनफल होईल हें उघड आहे म्हणून अ ब क ड ह्या सूचिखंडाचें घनफल =

$$\text{मै. उ. गा} + \text{म} (\text{त} - \text{म}) \text{ ड. गा} + (\text{त} - \text{म})^२ \frac{\text{उगा}}{३}$$

$$= \frac{\text{उगा}}{३} (३ \text{ मै} + ३ \text{ मत} - ३ \text{ मै} + \text{तै} + \text{मै} - २ \text{ तम})$$

$$= \frac{\text{उगा}}{३} (\text{मै} + \text{मत} + \text{तै}) \times ३$$

$$= \frac{\text{उ}}{६} (२ \text{ मै गा} + २ \text{ मत गा} + २ \text{ तै गा})$$

$$\therefore \text{सूचिखंडघनफल} = \frac{\text{उ}}{६} (\text{मै गा} + \text{तै गा} + (\text{म} + \text{त})^३ \text{ गा})$$

$$\therefore \text{सूचिखंडघनफल} = \frac{\text{उ}}{६} (\text{मुखजक्षेत्रफल} + \text{तलजक्षेत्रफल} + \text{युतिजक्षेत्रफल})$$

वरील समीकरणामध्ये $\text{म} = ०$ किंमत धरली असतां सूचीचे घनफल येईल.

$$\therefore \text{सूचिघनफल} = \frac{\text{तलजक्षेत्रफल} \times \text{उ}}{३}$$

\therefore इष्टतिद्धि झाली.

उदाहरणम्—मुखे दशद्वादशहस्ततुल्यं विस्तारदैर्घ्यं तु तले तदर्थम् यस्याः सखे सप्तकरश्च वेधः का खातसंख्या वद तत्र वाप्याम् ॥

अर्थ—एक सुचिखंडाकृति विहीर आहे. तिची तोंडाकडील रुंदी १० हात, व लांबी १२ हात आहे. आणि याच्या निम्मे लांबी रुंदी तळाकडे आहे व त्या विहिरीची उंची ७ हात आहे तर त्या विहिरीचे घनफल काय हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$१२ \times १० = १२० \text{ हें मुखजक्षेत्रफल,}$$

$$६ \times ५ = ३० \text{ हें तलजक्षेत्रफल,}$$



(१९८)

(१२ + ६) (१० + ५) = २७० हैं युतिजक्षेत्रफल.

या तिन्ही क्षेत्रफलांची बेरीज २२० हिला ६ नीं भागून ७० यास उंची ७ नें गुणून २९० हैं विहीरीचें घनफळ झालें हें उत्तर.

उदाहरणम्—खातेऽथ तिग्मकरतुल्यचतुर्भुजे च किं स्यात्फलं नवमितः किल यत्र वेधः ॥ वृत्ते तथैव दशवि. स्तुतिपंचवेधे सूचीफलं वद तयोश्च पृथक् पृथक्मे ॥

अर्थ—ज्याची प्रत्येक बाजू १२ हात आहे असा एक चौरसाकृति खळगा आहे व त्याची खोली ९ हात आहे तर त्याचें घनफल काय हें सांग ?

ज्याचा व्यास १० हात व खोली ९ हात आहे अशा वर्तुळाकृति खळगाचें घनफल काय हें सांग ?

वरील दोन्ही खळगे सूचीच्या आकृतीचे असतील तर त्याची घनफले काय हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

पहिलें उदाहरण—लांबी १२ रुंदी १२ व उंची ९ यांचा गुणाकार १२९६ हें सळग्याचें घनफळ झालें हें उत्तर.

हाच सळगा सूच्याकृति मानून १२९६ यास ३ नें भागून ४३२ सूचिसाताचें घनफळ झालें हें उत्तर.

दुसरें उदाहरण— व्यास १० यास ३१४७ नीं गुणून १२५० नीं भागून सूक्ष्मपरिधि $\frac{३१४७}{४}$ इतका आला यास $\frac{१०}{४}$ नें गुणून $\frac{३१४७०}{४}$ हें तळाचें क्षेत्रफल झालें यास उंची ५ नें गुणून $\frac{३१४७००}{४}$ इतकें घनफळ वृत्ताकृति समसाताचें झालें हें उत्तर.

हाच सळगा सूच्याकृति मानून $\frac{३१४७००}{४}$ या समसाताचें घनफळास ३ नें भागून $\frac{३१४७०००}{४}$ इतकें वृत्तसूचीचें घनफळ झालें हें उत्तर.

याप्रमाणें खातव्यवहाराचें सोपपत्तिक भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

चितिव्यवहार.

—:0:—

सूत्रम्—उच्छ्रयेण गुणितं चितेः किल क्षेत्रसंभवफलं
घनं भवेत् ॥ इष्टिकाघनहृते घने चितेरिष्टिकापरिमितिश्च
लभ्यते ॥ इष्टिकोच्छ्रयहृदुच्छ्रितिश्चितेः स्युस्तराश्च दृपदां
चितेरपि ॥

अर्थ—ज्या घनाकृतीच्या दोन्ही शेवटांच्या पातळ्या सरळ,
एकरूप, व समांतर असतात. आणि सभोवतालच्या सर्व बाजू
या दोन्ही शेवटांस चिकटलेल्या असून समांतरभुज चौकोन
असतात. त्या घनाकृतीस “ चिति ” असें म्हणतात. इंग्रजी
भाषेमध्ये चितीला पृष्ठम असें म्हणतात.

चितीच्या तळाचे क्षेत्रफल काढून त्यास चितीच्या उंचीने
गुणिलें असतां चितीचे घनफल येते.

चितीच्या घनफळास विटेच्या घनफळानें भागिलें असतां
चितींतोळ विटांची संख्या येते.

चितीच्या उंचीस विटेच्या उंचीनें भागिलें असतां चितीतील
विटांच्या थरांची संख्या येते.

उदाहरणम्—अष्टादशांगुलं दैर्घ्यं विस्तारो द्वादशांगुलः ॥
उच्छ्रितिर्यंगुला यासामिष्टिकास्ताश्चितौ किल ॥ यद्वि-
स्तुतिः पंचकराष्टहस्तं दैर्घ्यं च यस्यां त्रिकरोच्छ्रितिश्च ॥
तस्यां चितौ किं फलमिष्टिकानां संख्या च का ब्रूहि
कतिस्तराश्च ॥

अर्थ—ज्या विटेची लांबी १८ अंगुलें, रुंदी १२ अंगुलें
व जाडी ३ अंगुलें अशा विटांनीं; जिची लांबी ८ हात, रुंदी ९



हात, व उंची ३ हात अशी काटकोन चौकोनाकृति चिति बा-
धावयाची आहे तर त्या चितीचें घनफळ काय होईल ? तसेंच
तिला ज्या विटा लागतील त्यांची संख्या काय ? व थर किती
हैं सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$८ \times ५ \times ३ = १२०$ घनहात चितीचें घनफळ हैं उत्तर.

$\frac{३}{४} \times \frac{५}{४} \times \frac{८}{४} = \frac{३०}{४}$ घनहात हैं विटेचें घनफळ झालें यानें चितीचे
घनफळास १२० भागून २५६० विटांची संख्या हैं उत्तर.

चितीची उंची ३ हात यांस $\frac{३}{४}$ हात विटेच्या जाडीनें भागून २४ थर
विटांचे होतील हैं उत्तर.

या रीतीची उपपत्ति अत्यंत सुलभ असल्यामुळें ती येथें दिली नाहीं.

याप्रमाणें चितिव्यवहाराचें भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

क्रकचव्यवहार.

—O—

सूत्रम्—पिंडयोगदलमग्रमूलयोर्द्वैर्घ्यसंगुणितमंगुलात्मक-
म् ॥ दारुदारणपथैः समाहृतं षट्स्वरेषु विहङ्गरात्मकम् ॥

अर्थ—करवतीनें लांकडें कांपणाऱ्याचे कामाचें माप कराव-
याचें झाल्यास, लांकडाचें मूळ व शेवट या दोन्ही तोंडां-
च्या जाडीच्या बेरजेचे अर्धास लांकडाच्या लांबीनें गुणिलें
असतां लांकडाच्या एका उभ्या कांपाचें क्षेत्रफळ येतें. नंतर
त्यास तें लांकूड जितक्या ठिकाणीं कांपिलें असेल त्या स्थानां-
च्या संख्येनें गुणिलें असतां सर्व कांपांचें क्षेत्रफळ होतें. जर

क्षेत्रफल अंगुलात्मक असेल तर त्यास १७६ नीं भागिलें असतां क्षेत्रफल हस्तात्मक होईल.

उदाहरणम्-मूले नखांगुलमितोऽथ नृपागुलोऽग्रे पिंडः
शतांगुलमितं किल यस्य दैर्घ्यम् ॥ तदारुदारणपथेषु चतु-
र्षु किं स्याद्वस्तात्मकं वद सखे गणितं द्रुतं मे ॥

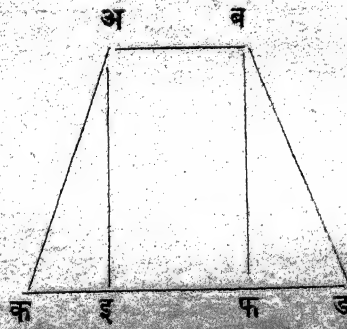
अर्थ-ज्या चतुरस्र लांकडाची मूळाकडील जाडी २० अंगु-
ळें, व शेवटाकडील जाडी १६ अंगुळें, व लांबी १०० अंगुळें
आहे. या लांकडाचे उभे कांप ४ केले असतां त्या कांपांचें
क्षेत्रफल हस्तात्मक काय होईल हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\frac{20 + 16}{2} \times 100 \times 4 = 24 \text{ हस्तात्मक क्षेत्रफल}$$

४ कांपांचें हें उत्तर.

उपपत्ति.



करवतीनें कापून लांकडाची निघालेली फळी अबकड ही
आहे. यांतील अब ही लांकडाची जाडी शेवटाकडील आहे व
कड ही जाडी मूळाकडील आहे असे समजा.

आतां अबकड या कांपांचें क्षेत्रफल काढावयाचें आहे.



(२०२)

$$\begin{aligned} \text{अवकड क्षेत्रफल} &= \triangle \text{ अकई} + \triangle \text{ बकड} + \square \text{ अकईफ} \\ \therefore \text{अवकड क्षेत्रफल} &= \frac{\text{अई} \times \text{कई}}{२} + \frac{\text{अई} \times \text{फड}}{२} + \text{अई} \times \text{ईफ} \\ \therefore \text{क्षे. फ.} &= \frac{\text{अई} (\text{कई} + \text{फड} + २ \text{ ईफ})}{२} \end{aligned}$$

हे एका कांपाचें क्षेत्रफल झालें यास कांपाच्या संख्येने गुणिलें असतां सर्व कांपाचें क्षेत्रफल होईल.

\therefore इष्टसिद्धि झाली.

सूत्रम्—छिद्यते तु यदि तिर्यगुक्तवत्पिंडविस्तृतिहतेः फलं तदा ॥ इष्टिकाचित्तिट्टषच्चित्तिखातक्राकचव्यवहृतौ खलु मूल्यम् कर्षकारजनसंप्रतिपत्त्या तन्मृदुत्वकठित्ववशेन ॥

अर्थ—लांकूड चौकोनी असून मूळापासून शेवटांपर्यंत सर्वत्र सारख्या आकाराचें असेल ह्मणजे जाडी व रुंदी कोठेही कम जास्त नाही. असें लांकूड आंडवें कांपिलेले असल्यास जाडी व रुंदी यांचा गुणाकार केला असतां एका कांपाचें क्षेत्रफल येतें यास कांपांच्या स्थानसंख्येने गुणिलें असतां सर्व कांपाचें क्षेत्रफल येईल हें उघड आहे.

विटांची चिति, पाषाणाची चिति, खात (खळगाचें काम) व क्राकच (करवतीचें काम) या व्यवहारामध्ये वस्तूचा मृदुपणा व कठिणपणा ह्यावर अवलंबून कामाचें मौल्य असते.

उदाहरणम्—यद्विस्तृतिर्दितमितांगुलानि पिंडस्तथा षोडश यत्र काष्ठे ॥ छेदेषु तिर्यङ्मनवसुप्रचक्ष्व किं स्यात्फलं तत्र करात्मकं मे ॥

अर्थ—ज्याची रुंदी ३२ अंगुलें व जाडी १६ अंगुलें अशा

सर्वत्र सारख्या आकाराचे चौकोनी लांकडाचे ९ कांप आडवे केले असतां त्या कांपांचें क्षेत्रफळ काय हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

$$\frac{32 \times 16 \times 9}{406} = 8 \text{ हात क्षेत्रफळ हें उत्तर.}$$

याप्रमाणें क्रकचव्यवहाराचें भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

राशिव्यवहार

—:0:—

सूत्रम्—अनणुषुदशमांशोऽणुष्वयैकादशांशः परिधि-
वमभागः शूकधान्येषु वेधः ॥ भवति परिधिषष्ठे वर्गिते
वेधनिष्ठे घनगणितकराः स्युर्मागधास्ताश्च स्वार्यः ॥

अर्थ—ज्वारी, उडीद, तुरी, चणे इत्यादि स्थूल धान्यांची
रास सपाट जमिनीवर असली तर तिच्या परिधाच्या दहाव्या
हिश्शाबरोबर मधील उंची असते. नाचणे, राळे, खसखस, राज-
गिरे, इत्यादि सूक्ष्म धान्याची रास असल्यास परिधाचा ११ वा
हिस्सा मधील उंची असते. गहू, तांदूळ इत्यादि शूक धान्याची
रास असल्यास परिधाचा ९ वा हिस्सा मधील उंची असते. ह्या
उंची प्रत्यक्ष अनुभवावरून काढिल्या आहेत.

धान्य राशीच्या परिधास ६ नें भागून वर्ग करावा. त्या
वर्गास धान्य राशीच्या उंचीने गुणून जो गुणाकार येईल तित-
के घनहात किंवा तितक्याच मागध स्वारिका धान्याची रास
आहे असे समजावें.



(१०४)

उपपत्ति.

सम भूमीवर धान्यराशी वृत्तसूच्याकार असतो म्हणून वृत्त-सूचीचें घनफल काढणें हें कर्तव्य आहे.

क्षेत्रव्यवहारांतोळ " वृत्तक्षेत्रेपरिधिगुणित व्यास पादः फल " यासूत्रानें धान्यराशीच्या तळाचें क्षेत्रफल

$$\frac{\text{परिधि} \times \text{व्यास}}{8} \text{ हें आहे त्यांत}$$

$$\text{व्यास} = \frac{\text{परिधि}}{3} \text{ सुमारे धरून}$$

$$\text{तलक्षेत्रफल} = \frac{\text{परिधि}}{8} \times \frac{\text{परिधि}}{3}$$

व खातव्यवहारांतोळ " क्षेत्रफलं वेधगुणं खाते घनहस्त संख्या स्वात् " या सूत्रानें

$$\text{समखातघनफल} = \frac{\text{परिधि}}{8} \times \frac{\text{परिधि}}{3} \times \text{उंची}$$

नंतर " समखातफलत्र्यंशः सूचीखाते फलंभवति " या सूत्रानें

$$\text{धान्यराशिघनफल} = \frac{\text{परिधि}}{8} \times \frac{\text{परिधि}}{3} \times \frac{\text{उंची}}{3}$$

$$\therefore \text{धा. रा. घ.} = \frac{\text{परिधि}^2 \times \text{उ.}}{36}$$

$$\therefore \text{घ.} = \left(\frac{\text{परिधि}}{6} \right)^2 \times \text{उंची}$$

म्हणून इष्टसिद्धि साली.

उदाहरणम्—समभुवि किल राशिर्गःस्थितःस्थूलधान्यः
परिधिपरिमितिर्भोहस्तवष्टिर्यदीया ॥ प्रवद गणक स्वार्थः
किमिताः संति तस्मिन्नथ पृथगणुधान्ये शूकधान्ये च
शीघ्रं ॥

अर्थ—सपाट जमिनीवर एक स्थूल धान्याची रास आहे.
तिचा परिघ ६० हात आहे तर त्या राशीमध्ये किती मागध
खारिका धान्य आहे ? व तीच रास सूक्ष्म धान्याची किंवा
शूकधान्याची असेल तर किती मागध खारिका धान्य असेल
हे सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

येथे परिधि ६० आहे म्हणून याचा दशमांश ६ ही धान्य राशीची उंची

∴ मागधखारिका = $(\frac{६०}{६})^२ \times ६ = ६००$ हे उत्तर.

सूक्ष्मधान्याची रास असल्यास $\frac{६०}{१५}$ ही धान्यराशीची उंची झाली.

∴ मागधखारिका = $(\frac{६०}{१५})^२ \times \frac{६०}{१५} = \frac{६०००}{१५}$ हे उत्तर.

शूकधान्याची रास असल्यास $\frac{६०}{१०}$ ही उंची झाली.

∴ खारिका = $(\frac{६०}{१०})^२ \times \frac{६०}{१०} = \frac{६००००}{१०}$ हे उत्तर.

सूत्रम्—द्विवेदसन्निभागैकनिघ्नात्तु परिधेः फलम् ॥ भि-
त्यंतर्बाह्यकोणस्थराशेः सरगुणभाजितम् ॥

अर्थ—धान्यराशि भिंतीला लागली असल्यास परिघ अर्ध-
वृत्तकार असतो ह्याणून त्याची दुप्पट करून पूर्वोक्त पद्धतीने
खारिका आणल्या असतां धान्यमान दुप्पट येईल त्याचें अर्ध
केलें ह्याणजे भिंतीला लागलेल्या धान्याचें मान येईल.

धान्यराशि दोन भिंतीच्या कोपऱ्यांत असल्यास त्याचा
परिघ ३ असतो ह्याणून त्याची चौपट करून पूर्वोक्त पद्धतीने
धान्यमान जें येईल तें चौपटीने जास्त येईल कारितां त्यास
४ नी भागून धान्यमान येईल.



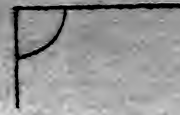
(२०६)

तसेंच धान्यराशि दोन भिंतींच्या बाहेरील कोंपऱ्यास लागून असल्यास $\frac{3}{4}$ वर्तुळाच्या आकाराचा परिघ त्या राशीचा असतो म्हणून त्या परिघाची $\frac{3}{4}$ पट करून पूर्ववत् मागध खारिका ज्या येतील त्या $\frac{3}{4}$ पटीने अधिक होतील म्हणून $\frac{3}{4}$ ने त्यास भागिले असतां बाहेरील कोंपऱ्यास लागलेल्या धान्यराशीचे मान येते.

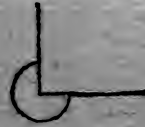
याची उपपत्ति खाली दिलेल्या केवळ आकृतीवरून स्पष्ट होईल भिंतीस लागलेला धान्यराशि



दोन भिंतींच्या कोंपऱ्यांत असलेला राशि



भित्तिबाह्यलभ्यराशि



उदाहरणम्—परिधिभिन्निलग्रस्यराशे त्रिशत्करः स-
खे ॥ अंतःकोणस्थितस्यापि तिथितुल्यकरः किल ॥ बहिः-
कोणस्थितस्यापि पंचघ्ननवसंभिताः ॥ तेषामाचक्ष्वमेक्षिभं-
घनहस्तान् पृथक् पृथक् ॥

अर्थ—भिंतीस लागून असलेल्या धान्यराशीचा परिघ ३० हात, भिंतीच्या कोंपऱ्यांत लागलेल्या राशीचा परिघ १९ हात,

आणि बाहेरील कोपऱ्यास लागून असलेल्या राशीचा परिघ ४९ हात आहे तर त्या तिन्ही राशीत पृथक् पृथक् धान्य किती आहे हें सांग ?

उत्तरानिष्काशनक्रिया.

पूर्वोक्त सर्व क्रिया करून

३०० घनहात	मित्तिलमरार्शीत स्थूल धान्य	} हें उत्तर.
१५०	कोणसंलभ	
४५०	बाह्यकोणसंलभ	

याप्रमाणें राशिव्यवहाराचें सोपपत्तिक भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

छायाव्यवहार.

—:०:—

सूत्रम्—छाययोः कर्णयोरंतरं ये तयोर्वर्गविश्लेषभक्ता रसाद्रीषवः ॥ सैकलब्धेः पदघ्नं तु कर्णांतरभातरेणोनयुक्तं दले स्तः प्रभे ॥

अर्थ—द्वादशांगुल शंकूच्या दोन वेळच्या छायांचें अंतर व त्याच वेळच्या कर्णांचें अंतर यांपासून त्या दोन वेळच्या छाया काढण्याची रीति या सूत्रांत दिली आहे.

छायांतराच्या वर्गातून कर्णांतराचा वर्ग वजा करून जी बाकी राहील तिने १७१ स भागार्थे. आलेल्या भागाकरांत १ मिळवून त्याचें वर्गमूळ काढावें. त्या वर्गमूळास कर्णांतरानें गुणून आलेला गुणाकार दोन ठिकाणीं मांडून एका ठिकाणीं छायांतर मिळवावें. व दुसऱ्या ठिकाणीं छायांतर वजा करावें. आणि त्यांचो अर्थ केलो असतां दोन्ही छायांचीं मानें येतात.

(२०८)

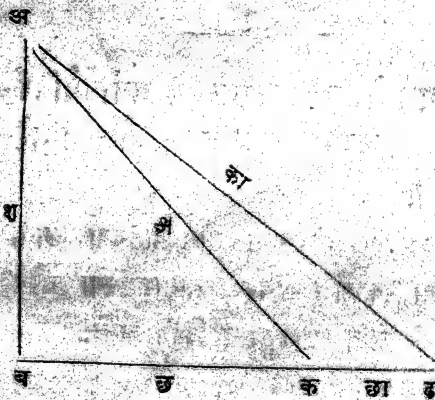
उदाहरणम्—नंदचंद्रैर्मितं छययोरंतरं कर्णयोश्चांतरं
विश्वतुल्यं ययोः ॥ ते प्रभे वक्ति नो युक्तिमान् वेत्यसौ-
व्यक्तमव्यक्तयुक्तं हि मन्येऽखिलं ॥

अर्थ—१२ अंगुलें शंकुच्या दोन वेळच्या छायाचिं अंतर
१९ व कर्णाचें अंतर १३ आहे. तर छायांचीं मागे काय
आहेत हें सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

१९ चा वर्ग ३६१ घालून १३ चा वर्ग १६९ वजा करून बाकी १९२
हिने ५७६ स भागून लब्धि ३ घालून १ मिळवून ४ याचें वर्गमूळ २ यास
कर्णांतर १३ ने गुणून २६ घालून छायांतर १९ मिळवून व वजा करून
४५ व ७ यांचीं अर्थ ४५ व ७ हा छाया हें उत्तर.

उपपत्ति.



या आकृतोमध्ये अ व या १२ अंगुल शंकु = श; वक
छाया = छ; बड दुसरी छाया = छा; अक कर्ण = क; अड
दुसरा कर्ण = का; याप्रमाणें संज्ञा देऊन.

$$\text{श} = \text{का} - \text{छा}$$

$$\text{श} = \text{क} - \text{छ}$$

(२०९)

या दोन समीकरणांची वजाबाकी करून

$$श - श = को - छा - के + छ$$

$$\therefore छा - छ = को - के$$

$$\therefore (छा + छ) (छा - छ) = (को + क) (को - क)$$

$$\left. \begin{array}{l} छा - छ = म \\ को - क = न \end{array} \right\} \text{अशा संज्ञा देऊन}$$

$$(छा + छ) म = (को + क) न \dots\dots\dots(१)$$

$$छा - छ = म$$

$$\therefore छा - छ + छ = म + छ$$

$$\therefore छा + छ = म + २ छ \dots\dots\dots(२)$$

$$को - क = न$$

$$\therefore को + क = न + २ क \dots\dots\dots(३)$$

समीकरण (१) मध्ये (२) व (३) पैकी किमती ठेवून

$$(म + २ छ) म = (न + २ क) न$$

$$\therefore म + २ छम = न + २ कन$$

$$\therefore मे - ने + २ छम = २ कन$$

या समीकरणांत $क = \sqrt{श + छ}$ ही किमती ठेवून

$$मे - ने + २ छम = २ न \sqrt{श + छ}$$

उभयपक्षांचा वर्ग करून

$$(मे - ने)^2 + ४ छमे + ४ छम(मे - ने) = ४ ने (श + छ)$$

$$४ छमे + ४ छम(मे - ने) = ४ नेश + ४ नेछ - (मे - ने)^2$$

$$४ छ (मे - ने) + ४ छम(मे - ने) = ४ नेश - (मे - ने)^2$$

उभयपक्षांस (मे - ने) याने भागून व मे मिळवून

(२१०)

$$४ छ + ४ छम + म = \frac{४ नेश - (म - न)^२}{म - न} + म$$

उभयपक्षांचीं मूळें काढून

$$२ छ + म = \sqrt{\frac{४ नेश - न + म३}{म - न}}$$

$$\therefore छ = \frac{१}{२} \left\{ \sqrt{\frac{४ नेश - न + म३}{म - न}} - म \right\}$$

$$\therefore छ = \frac{१}{२} \left\{ न \sqrt{\frac{४ श + म - न}{म - न} + म - न} - म \right\}$$

$$\therefore छ = \frac{१}{२} \left\{ न \sqrt{\frac{४ श}{म - न} + १} - म \right\} \dots (४)$$

आतां छा - छ = म आहे

$$\therefore छा = छ + म$$

$$\therefore छ = छा - म$$

ही किंमत (४) मध्ये ठेऊन

$$छा = \frac{१}{२} \left\{ न \sqrt{\frac{४ श}{म - न} + १} - म \right\} + म$$

$$= \frac{न \sqrt{\frac{४ श}{म - न} + १}}{२} - \frac{म}{२} + म$$

$$२ छा = न \sqrt{\frac{४ श}{म - न} + १} - म + २ म$$

यांत श = १२२ = १४४ ही किंमत ठेऊन

$$छ = \frac{1}{2} \left\{ n \sqrt{\frac{१७१}{३-n} + १ + म} \right\} \dots\dots(९)$$

∴ समीकरण (४) व (९) यांवरून इष्टसूत्र सिद्धि झाली.

सूत्रम्—शंकुः प्रदीपतलशंकुतलांतरघ्नच्छाया भवेदि
नरदीपशिखौख्यभक्तः ॥

अर्थ—दीपतल व शंकुतल यांच्या अंतरानें १२ स गुणून त्यास, दीपाच्या उंचीतून शंकूची उंची वजा करून बाकीने भागिलें असतां छायेचें मान येतें.

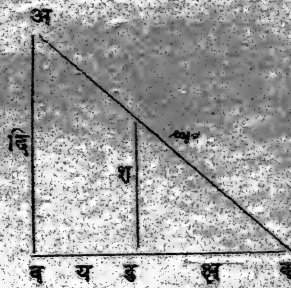
उदाहरणम्—शंकुप्रदीपांतरभूखिहस्ता दीपोच्छ्रितः
सार्धकरत्रया चेत् ॥ शंकोस्तदाऽर्कगुलसंमितस्य तस्य
प्रभा स्यात्किंयती वदाऽऽशु ॥

अर्थ—शंकुतल व दीपतल यांचें अंतर ३ हात आहे व दीपाची उंची ३ १/२ हात आहे तर त्या १२ अंगुल शंकूची छाया किती पडेल हें सांग ?

उत्तरानिष्काशनक्रिया.

शंकूची उंची ३ हात यास ३ ने गुणून ३ यास, दीपाची उंची ३ १/२ हात यातून ३ शंकूवजा करून बाकी ३ दिने भागून ३ हात म्हणजे १२ अंगुलें छाया हें उत्तर

उपपत्ति.



(२१२)

या आकृतीमध्ये अ व ह्या दीपाच्या उंची = दी; डई ह्या द्वादशांगुल शंकू = श; वड ह्या दीपतळ व शंकुतळ यांच्या अंतरा = य; ड क ही छाया = क्ष अशा संज्ञा देऊन

$$\frac{\text{क्ष}}{\text{श}} = \frac{\text{य} + \text{क्ष}}{\text{दी}}$$

कारण अ व क आणि ई ड क हे दोन्ही त्रिकोणस्वरूप आहेत.

$$\therefore \text{क्षदी} = \text{श य} + \text{श क्ष}$$

$$\therefore \text{क्षदी} - \text{श क्ष} = \text{श य}$$

$$\therefore \text{क्ष} (\text{दी} - \text{श}) = \text{श य}$$

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{\text{श य}}{\text{दी} - \text{श}}$$

म्हणून इष्टमिद्धि झाली.

सूत्रम्—छायात्पृते तु नरदीपतलातरग्रे शंकौ भवेन्नरयु-
ते खलु दीपकौच्यम् ॥

अर्थ—शंकु व दीप यांच्या अंतरास छायेने मागून शंकूने गुणावे व त्यांत शंकु निळतावा म्हणजे दीपाची उंची येते.

उदाहरणम्—प्रदीपशंकवन्तरभस्त्रिहस्ता छायांगुलैः पौ-
डशभिः समा चेत् ॥ दीपोच्छ्रतिः स्याक्रियती वदाऽऽशु
प्रदीपशंकवन्तरमुच्यतां मे ॥

अर्थ—दीप व शंकु यांचे अंतर ३ हात, व १६ अंगुळे शंकूची छाया आहे तर दीपाची उंची किती हें सांग ?

हमारे उदाहरण—वरील उदाहरण सोडवून जी दीपाची उंची येईल ती व शंकूची १६ अंगुळे छाया यावरून दीप व शंकु यांमधील अंतर सांग !

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

अंतर ३ यास ३ ने गुणून ३ यास ३ हात छायेने भागून ३ बांवा ३ शंकु मिळवून ३ हात दीपाची उंची ह उत्तर.

आतां दुसरे उदाहरण सोडविण्यास सूत्र निराळें आहे तें देऊन उदाहरण सोडवून दोन्ही सूत्रांची उपपत्ती एकदम देऊं.

**सूत्रम्—विशंकुदीपोरूप्य संगुणा भा शंकूदृता दीप-
नरांतरं स्यात् ॥**

अर्थ—दीपाच्या उंचीतून शंकु वजा करून बाकीने छायेस गुणिलें असतां व शंकूने भागिलें असतां दीप व शंकु या मधील अंतर येतें.

∴ $\frac{१}{३}$ दीपाच्या उंचीतून $\frac{१}{३}$ शंकु वजा करून बाकी $\frac{२}{३}$ यास $\frac{१}{३}$ छायेने गुणून व $\frac{१}{३}$ शंकूने भागून अंतर ३ हात हें उत्तर.

उपपत्ति.

मागे दिलेल्या आकृती वरूनच

$$\frac{\text{क्ष}}{\text{श}} = \frac{\text{य} + \text{क्ष}}{\text{दी.}}$$

$$\therefore \text{दी} = \frac{\text{श} (\text{य} + \text{क्ष})}{\text{क्ष}}$$

$$\therefore \text{दी} = \frac{\text{य श}}{\text{क्ष}} + \text{श} \dots\dots\dots (१)$$

याच समीकरणावरून

$$\text{य} = \frac{\text{क्ष दी} - \text{क्ष श}}{\text{श}}$$

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{क्ष} (\text{दी} - \text{श})}{\text{श}} \dots\dots\dots (२)$$



समीकरण (१) व (२) यावरून दोन्ही सूत्रांची सिद्धि झाली.

सूत्रम्—छायाग्रयोरंतरसंगुणा भा छायाप्रमाणांतरहृद्रवेन्द्रः भूशंकुघातः प्रभया विभक्तः प्रजायते दीपशिखौक्षमेव ॥ त्रैराशिकेनैव यदेतदुक्तं व्याप्तं स्वभेदैर्हरिणेव विश्वम् ॥

अर्थ—दोन्ही छायांच्या अग्रामधील अंतराने छायेस गुणून त्यास दोन्ही छायांच्या लांब्यांच्या अंतराने भागिले असतां भूमी क्षणने दीपापासून छायेच्या अप्रापर्यंत अंतर येतें.

वरील पद्धतीने काढलेली भूमी व शंकु यांच्या गुणाकारास छायेने भागिले असतां दीपाची उंची येते.

ज्याप्रमाणे ईश्वराने आपल्या भिन्न भिन्न स्वरूपाने विश्व व्यापिले आहे, तसें हे सर्व छायाव्यवहारांतील गणित त्रैराशिकाने व्याप्त आहे.

उदाहरणम्—शंकोर्धार्कमितांगुलस्य सुमते दृष्टा किला-
घांगुला छायाग्राभिमुखे करद्वयमिनेन्यस्तस्य देशे पुनः ॥
तस्यैवार्कमितांगुला यदि तदा छाया प्रदीपांतरं दीपौक्ष्यं
च कियद्दृढं व्यवहर्ति छायाभिधां वेत्तिचेत् ।

अर्थ—एका दीपापासून कांही अंतरावर १२ अंगुले उंचीचा एक शंकू ठेविला, तेव्हां त्याची छाया ८ अंगुले पडली. पुढे तो च शंकू छायेच्याच दिशेमध्ये पूर्व स्थानापासून दोन हात अंतरावर ठेविला, त्याची छाया १२ अंगुले पडली तर दीपापासून छायेच्या अग्राचे अंतर काय व दीपाची उंची काय

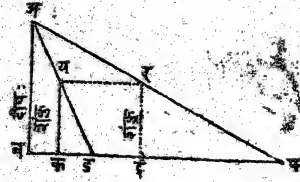
उत्तरनिष्काशनाक्रिया.

छायाग्रामधील अंतर ($४८ - ८ + १२$) म्हणजे ५२ यास छाया ८ नें गुणून ४१६ यास छायांतर ($१२ - ८$) म्हणजे ४ नें भागून १०४ अंगुळें, हे दीपापासून पहिल्या छायाग्रापर्यंत अंतर शालें हें उत्तर.

छायाग्रामंतर ५२ यास १२ नें गुणून व छायांतर ४ नें भागून १५६ अंगुळें हे दीपापासून दुसऱ्या छायाग्रापर्यंत अंतर शालें हें उत्तर.

वर काढलेली भूमि १०४ यास १२ नीं गुणून व ८ नीं भागून १५६ अंगुळें दिव्याची उंची हें सत्तर.

उपपत्ति.



येथें अब दीर्घोच्य = दी; यक शंकु = क्ष; बक = य;
कड = क्ष; कई = अ; ईफ = क्ष;

आणि कई = या, अशा संज्ञा देऊन

$$\frac{क्ष}{श} = \frac{क्ष + य}{दी}$$

$$\therefore दी = \frac{क्षश + यश}{क्ष} \quad (१)$$

$$\frac{क्ष}{श} = \frac{क्ष + या}{दी}$$

$$\therefore दी = \frac{क्षश + याश}{क्ष} \quad (२)$$

(२१९)

समीकरण (१) व (२) यांतील किमतीसमान आहेत सम्यून

$$\frac{\text{क्ष} + \text{य}}{\text{क्ष}} = \frac{\text{क्षा} + \text{या}}{\text{क्षा}}$$

दोन्ही पक्षांस शून्ये भागून

$$\frac{\text{क्ष} + \text{य}}{\text{क्ष}} = \frac{\text{क्षा} + \text{या}}{\text{क्षा}}$$

$$\therefore \frac{\text{य}}{\text{क्ष}} + १ = \frac{\text{या}}{\text{क्षा}} + १$$

$$\therefore \frac{\text{य}}{\text{क्ष}} = \frac{\text{या}}{\text{क्षा}}$$

यांत या = य + अ ही किंमत ठेऊन

$$\frac{\text{य}}{\text{क्ष}} = \frac{\text{य} + \text{अ}}{\text{क्षा}}$$

$$\therefore \text{य} \text{ क्षा} = \text{क्ष} \text{ य} + \text{अ} \text{ क्ष}$$

$$\text{य} \text{ क्षा} - \text{क्ष} \text{ य} = \text{अ} \text{ क्ष}$$

$$\text{य} (\text{क्षा} - \text{क्ष}) = \text{अ} \text{ क्ष}$$

$$\text{य} = \frac{\text{अ} \text{ क्ष}}{\text{क्षा} - \text{क्ष}}$$

उभय पक्षांत क्ष मिळवून

$$\text{य} + \text{क्ष} = \frac{\text{अ} \text{ क्ष}}{\text{क्षा} - \text{क्ष}} + \text{क्ष}$$

$$\text{य} + \text{क्ष} = \frac{\text{अ} \text{ क्ष} + \text{क्षा} \text{ क्ष} - \text{क्ष}^2}{\text{क्षा} - \text{क्ष}}$$

$$य + क्ष = \frac{क्ष (अ + क्ष - क्ष)}{क्ष - क्ष}$$

येथे (अ + क्ष - क्ष) हे दोन छायाग्रांमधील अंतर आहे व य + क्ष यास भूमी अशी संज्ञा देऊन

$$भूमि = \frac{क्ष \times छायाग्रांतर}{क्ष - क्ष}$$

$$तसेंच \frac{क्ष}{श} = \frac{भूमि}{दि}$$

$$\therefore दी = \frac{श \times भु}{क्ष}$$

म्हणून सर्व सूत्रांची इष्टसिद्धि झाली.

श्लोकः—यत्किंचिद्रुणभागहारविधिना बीजेऽत्र वा गण्यते तत्त्रैराशिकमेव निर्मलधियामेवावगम्यं विदाम् ॥
एतद्यन्द्दुष्टाऽस्मदादिजडधीधीवृद्धिबुद्ध्या बुधैस्तभ्देदान्सुगमान्विधाय रचितः प्राज्ञैः प्रकीर्णादिकम् ॥

अर्थ—बीजगणितामध्ये किंवा अंगगणितामध्ये जे गणित गुणाकार व भागाकार रीतीने केले जाते ते सर्व त्रैराशिकच होय. हे विद्वान लोकांस माहित आहे. तेच आमच्या सारख्या बुद्धिमंद लोकांस बुद्धिवृद्धि न्हावी या हेतूने सोपे प्रकार करून व्यस्तविधि, पंचराशिक वगैरे प्रकीर्णादिक गणित रचिलेले आहे.

याप्रमाणे छायान्वयवहाराचे सोपपत्तिक माषांतर समाप्त झाले.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.



अंकपाश प्रकरणम्.

सूत्रम्—स्थानांतमेकादिचयांकघातः संख्याविभेदा नियतैः स्थुरकैः ॥ भक्तोकमित्यांकसमासनिघ्नः स्थानेषु युक्तो मितिसंयुतिः स्यात् ॥

अर्थ—दिलेल्या अंकस्थानां इतक्या ठिकाणीं एक अंकपासून एकोत्तरांनं अनुक्रमानें अंक मांडून त्यांचा गुणाकार केला असता दिलेल्या अंकांचे संख्याभेद होतात.

संख्याभेदांस दिलेल्या अंकांच्या बेरजेनें गुणून त्यास अंक-संख्येनें भागावें. नंतर तो भागाकार एकाधिक स्थानांनं अंक-स्थानां इतक्या ठिकाणीं एका खालीं एक मांडून बेरीज करावी झणजे ती संख्याभेदांची बेरीज होते.

उदाहरणम्—द्विकाष्टकाभ्यां त्रिनवाष्टकैर्वा निरंतरं व्यादिनवावसानैः ॥ संख्याविभेदाः काति संभवन्ति तत्संख्यकैक्यानि पृथक् वदाशु ॥

अर्थ—२ आणि ८ या दोन अंकांनीं; ३, ९, व ८ या तीन अंकांनीं; आणि २ पासून ९ पर्यंत क्रमिक ८ अंकांनीं भिन्न भिन्न प्रकारच्या संख्या अंकविपर्ययांसोनें किती किती होतील ? व त्या संख्याभेदांच्या बेरजा काय होतील हें पृथक् पृथक् सांग ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

उदाहरण पहिलें—यांत २ व ८ हे अंक असून अंक संख्या २ आहे म्हणून २ स्थानापर्यंत १ पासून एकोत्तरांनं अंक मांडून त्यांचा गुणाकार केला तो $1 \times 2 = 2$ संख्याभेद झाले हें उत्तर.

आतां २ संख्याभेदांनीं शालेल्या संख्या ८२ व २८ हा आहेत, यांची बेरीज ११० होते ही बेरीज सूत्रांत दिलेल्या रीतीनें करून दाखवितां.

संख्याभेद २ यांस, सांगितलेले अंक २, ८ यांची बेरीज १० हिनें गुणून २० यास अंकमिती २ नें भागून १० भागाकार आला तो एका-सालीं एक क्षेत्र ठिकाणीं एकाधिकस्थानानें मांडून बेरीज केली तर $\frac{११०}{११०}$ म्हणून ११० संख्याभेदांची बेरीज शाली हें उत्तर.

उदाहरण दुसरें—यांत ३, १, ८ असे तीन अंक आहेत. म्हणून एकापासून ३ पर्यंत क्रमानें अंक मांडून त्यांचा गुणाकार केला तो $१ \times २ \times ३ = ६$ संख्याभेद हें उत्तर.

आतां संख्याभेद ६ त्यांस ३, १, ८ यांच्या बेरीजेस २० नें गुणून १२० यांस अंकमिती ३ नें भागून ४० हा भागाकार एकाधिकस्थानानें एका सालीं एक असा तीन स्थानीं मांडून बेरीज केली तर, $\frac{१२०}{४०}$ म्हणून संख्याभेदांची बेरीज ४४० हें उत्तर.

उदाहरण तिसरें—यांत अंक संख्या ८ आहे म्हणून.

$१ \times २ \times ३ \times ४ \times ५ \times ६ \times ७ \times ८ = ४०३२०$ संख्याभेद हें उत्तर.

$$\frac{४०३२० \times (२ + ३ + ४ + ५ + ६ + ७ + ८ + ९)}{८} =$$

२२१७६० हा भागाकार आला

२२१७६०

२२१७६०

२२१७६०

२२१७६०

२२१७६०

२२१७६०

२२१७६०

२२१७६०

२४६३११११७५३६०

ही संख्याभेदांची बेरीज हें उत्तर.

उपपत्ति.

या सूत्रामध्यें सांगितलेल्या अंकांतून प्रत्येक वेळीं सर्व

(१२०)

अंक घेऊन त्यांनीं जें संख्याभेद होतात ते काढण्याची रीति सांगितली आहे. म्हणजे न संख्यांक वस्तूतून प्रत्येक वेळीं न संख्यांकवस्तु घेऊन त्याचे सार्वत्रिक विपर्यय काढण्याची रीति आहे.

मार्गे मिश्रव्यवहाराच्या अंतिम सूत्राच्या उपपत्तीमध्ये न संख्यांक वस्तूचे सार्वत्रिक विपर्यय न होतात असे सिद्ध करून दाखविले आहे. न याचा अर्थ १ पासून क्रमिक न संख्यांचा गुणाकार असा आहे.

आतां फक्त सूत्रांतील संख्याभेदाच्या बेरजेच्या रीतीची उपपत्ति सांगतो.

प्रथम ३, ९, ८ या तीन अंकांनीं होणाऱ्या संख्याभेदांची बेरीज करूं—

तीन अंकांनीं होणारे संख्याभेद

३ हाणजे $१ \times २ \times ३ = ६$ आहेत. ते क्रमानें मांडून दाखवितों.

३९८

३८९

९३८

९८३

८९३

८३९

४४४०

यांत घातच्यास्थानीं ३ हे ३-१ वेळां येतात. ९ हे ३-१ वेळां, व ८ हे ३-१ वेळां येतात. व दहांच्या स्थानीं ३ हे ३-१ वेळां, ९ हे ३-१ वेळां, व ८ हे ३-१ वेळां येतात.

(१११)
तसेच एकंच्या स्थानी ३ हे ३-१ वेळां, ९ हे ३-१ वेळां
व ८ हे ३-१ वेळां येतात. कारण वस्तू संख्येतून १ वजा-
करून त्याचे जे सार्वशिक विपर्यय होतात. तितके वेळां
ते येणार

$$\begin{aligned}
 &\therefore ३ \left[३-१ \times १^० + ९ \left[३-१ \times १^० + ८ \left[३-१ \times १^० \right. \right. \right. \\
 &+ ३ \left[३-१ \times १^० + ९ \left[३-१ \times १^० + ८ \left[३-१ \times १^० \right. \right. \right. \\
 &+ ३ \left[३-१ \times १^० + ९ \left[३-१ \times १^० + ८ \left[३-१ \times १^० \right. \right. \right. \\
 &= ३-१ (३ + ९ + ८) १^० + \\
 &\quad ३-१ (३ + ९ + ८) १^० + \\
 &\quad ३-१ (३ + ९ + ८) १^० \\
 &= ३-१ (३ + ९ + ८) (१^० + १^० + १^०) \\
 &\text{यास ३ ने गुणून व भागून} \\
 &= \frac{३-१ \times ३ (३ + ९ + ८) (१^० + १^० + १^०)}{३} \\
 &= \frac{३ (३ + ९ + ८) (१ + १^० + १^०)}{३}
 \end{aligned}$$

ही संख्याभेदांची बेरीज झाली. यावरून सूत्रांत दिलेल्या रीतीची
उपपत्ति सहज लक्षांत येईल. ही विशेष उदाहरणास लक्षून
उपपत्ति झाली.

आतां सामान्य रीतीनें उपपत्ति करूं. अ, ब, क, डे, इत्या-
दि न अंक आहेत अशी कल्पना करून, न अंकाचे जे सार्व-
शिक विपर्यय होतील त्यांतील पद्धत्या राकेंत अ हा अंक,



(न-१) अंकांचे जे सार्वशिक विपर्यय होतील तितके वेळां येईल. म्हणून अ हा अंक न-१ वेळां येईल. तसेंच ब, क, इ इत्यादि अंकही तितकेच वेळां येतील. व दुसऱ्या राकेंमध्येही प्रत्येक अंक न-१ वेळां येतील. तसेंच तिसऱ्या चवथ्या इत्यादि उभ्या राकेंमध्ये प्रत्येक अंक येतील.

$$\therefore \underline{n-1} (अ + ब + क + न) १^०$$

$$+ \underline{n-1} (अ + ब + क + न) १^१$$

$$+ \underline{n-1} (अ + ब + क + न) १^२$$

$$+$$

$$+$$

$$+ \underline{n-1} (अ + ब + क + न) १^{n-1}$$

$$= \underline{n-1} (अ + ब + क + न) (१^० + १^१ + १^२ + १^{n-1})$$

$$= \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{1} (अ + ब + न) (१ + १^० + १^१ + १^{n-1})$$

$$= \frac{n(अ + ब + क + + न) (१ + १^० + १^१ + १^२ + १^{n-1})}{n}$$

म्हणून सर्वेष्ट सिद्धि झाली.

उदाहरणम्—पाशांकुशाहिडमरुककपालशूलैः स्वर्वा-
गशक्तिशरचापयुतैर्भवंति ॥ अन्योन्यहस्तकलितैः कति
मूर्तिभेदाः शंभोर्हरेरिव गदारिसरोजशंसैः ॥

अर्थ—पाश, अंकुश, सर्प, डमरू, कपाल, शूल, खड्ग,
शक्ति, शर, धनु, हीं १० आयुधे शंकराने परस्पर हातांत

(२२३)

सर्वच क्रमभेदाने धारण केली असता त्याचे मूर्तिभेद किती होतील ? व गदा, चक्र, कमल, व शंख ही चार आयुधे विष्णू-
ने परस्पर हातांत सर्वच क्रमभेदाने धारण केली असता त्याचे
मूर्तिभेद किती होतील ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

शंकराची आयुधे १० आहेत

$$\therefore १ \times २ \times ३ \times ४ \times ५ \times ६ \times ७ \times ८ \times ९ \times १० =$$

३६२८८०० शिवमूर्तिभेद हे उत्तर.

विष्णूची आयुधे ४ आहेत.

$$\therefore १ \times २ \times ३ \times ४ = २४ भेद हे उत्तर.$$

सूत्रम्—यावत्स्थानेषु तुल्यांकास्तद्भेदैस्तु पृथक्कृतेः ॥
भारभेदा वित्प्रता भेदास्तत्संख्यैक्यं च पूर्ववत् ॥

अर्थ—सांगितलेल्या अंकांत कांहीं समान अंक असल्यास,
जितक्या ठिकाणी समान अंक असतील तितक्या ठिकाणचे
अंक भिन्न समजून त्यांचे संख्याभेद पृथक् काढून त्या भेदांनी,
सांगितलेल्या सर्व अंकांचे पूर्वी सांगितल्या प्रकाराने संख्याभेद
काढून त्यांस भागवें. म्हणजे इष्टसंख्याभेद होतात, त्यांची
बेरीज पूर्वीच्या सूत्रांत दिलेल्या रीतीने करावी.

उदाहरणम्—द्विव्येकग्रूपपरिमितैः कति संख्यकाः स्यु-
स्तासां युति च गणकाऽऽशु मम प्रचक्ष्व ॥ अभोधिकुंभि-
न्नभूतशरैस्तथा कैश्चैदं कपाशमिति युक्तिविशारदोऽसि ॥

कथं—२, २, १, १ ह्या चार अंकांनी भिन्न प्रकारच्या
संख्या किती होतील. व ४, ८, ९, ९, ९, ह्या पांच अंकांनी
संख्याभेद किती होतील हे सांग !

(२२४)

उत्तरमिष्काशनक्रिया.

पहिल्या उदाहरणांत २, २, १, १, हे चार अंक मित्र समजून त्यांचें संख्याभेद $१ \times २ \times ३ \times ४ = २४$ इतकें झाले. व प्रथम दोन ठिकाणीं दोन तुल्य अंक आहेत. ते मित्र समजून त्यांचें संख्याभेद $१ \times २ = २$ झाले व पुढील दुसरे दोन अंक समान आहेत त्यांचेही भेद २ च झाले यांनीं पूर्वीच्या संख्याभेदां २४ स भागिले तेव्हां $२४ \div २ = १२$ आणि $१२ \div २ = ६$ संख्याभेद हें उत्तर

हे भेद मांडून दाखवितो.

२२११, २१२१, २११२, १२१२, १२२१, ११२२, आतां संख्या-भेद $६ \times (२ + २ + १ + १) = ३६$ यांस अंकमिती ४ ने भागून ९ भागाकार आला. तो एकाधिक स्थानानें एका सालीं एक मांडून

१०००
१००
१०
९

११११ संख्याभेदांची बेरीज हें उत्तर.

आतां दुसऱ्या उदाहरणामध्यें

४, ८, ५, ५, ५ हे पांच अंक मित्र समजून $१ \times २ \times ३ \times ४ \times ५ = १२०$ हे संख्या भेद झाले. यांत तीन ठिकाणीं समान अंक आहेत त्यांचे ते मित्र असतां $१ \times २ \times ३ = ६$ संख्याभेद होतात. यांनीं पूर्वीच्या भेदा १२० स भागून २० हे इष्ट संख्याभेद झाले. हें उत्तर.

आतां संख्याभेद २० $(४ + ८ + ५ + ५ + ५) \div ५ = १०८$ भागाकार आला

१०८
१०८
१०८
१०८
१०८

११९१९८८ बेरीज हें उत्तर.

उपपत्ति.

अंकांचे ऐवजीं अक्षरें धरून उपपत्ति करूं.

कल्पना करा, कीं, न अक्षरे आहेत; त्यांपैकीं अ हे अक्षर
५ वेळां, व अक्षर क वेळां, आणि स अक्षर र वेळां, आलेले
आहे; व बाकीं भिन्न अक्षरे आहेत.

ह्या न अक्षरांचे सार्वशिक विपर्यय क्ष होतात असे घेऊं.

आतां ह्या क्ष सार्वशिक विपर्ययांपैकीं प्रत्येक भेदामध्ये अ
हे अक्षर ५ वेळां आले आहे. तीं जर भिन्न असतीं तर प
असे भेद एका भेदांत झाले असते; मिळून क्ष भेदामध्ये क्ष×५
इतके भेद झाले असते. त्याचप्रमाणें व हे अक्षर क वेळां आले
आहे त्या ऐवजीं जर भिन्न अक्षरे असतीं तर क भेद एका
भेदांत होतील. म्हणून क्ष × ५ या सर्व भेदांमध्ये क्ष×५ × क
एकंदर भेद होतील. तसेंच स हे अक्षर र वेळां आहे त्यासंब-
धानें र भिन्न भेद होतील व एकंदर भेद क्ष. ५. क. र इ-
तके होतील. यांमध्ये मात्र सर्व भिन्न अक्षरे आहेत. म्हणून
ते भेद, न अक्षरामध्ये सर्व अक्षरे भिन्न असतां जे भेद न हा-
तात त्यांचे बरोबर आहेत.

$$\therefore \text{क्ष} \times \text{५} \times \text{क} \times \text{र} = \text{न}$$

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{\text{न}}{\text{५} \cdot \text{क} \cdot \text{र}}$$

म्हणून सूत्रसिद्धि झाली.

सूत्रम्—स्थानांतमेकापाचितांतिमांकघातोऽसमांकैश्च भि-
तिप्रभेदाः ॥

अर्थ—दिलेल्या असमान अंकांवरून प्रत्येक वेळीं कांहीं
नियमित अंक घेऊन संख्याभेद करावयाचे असल्यास, प्रत्येक
भेदांत जीं अंकांस्थाने असावयाचीं तितक्या ठिकाणीं अंतिम अंक



(२०१)

एकेकाने उणा करीत जाऊन मांडून त्यांचा गुणाकार केला असतां इष्टभेद (पाक्षिक विपर्यय) येतात.

उपपत्ति.

मागे मिश्रव्यवहार प्रकरणाच्या अंतिम सूत्राची उपपत्ति देत असतां तीमध्ये न वस्तूतून प्रत्येक वेळां १ वस्तु घेऊन भेद केले असतां.

न (न - १) (न - २) (न - १ + १)

इतके होतात अशी सारणी सिद्ध करून दाखविली आहे. तीच अंकाविषयीं मानिली असतां प्रस्तुत सूत्राची सिद्धि होते.

उदाहरणम्—स्थानषट्स्थितैरंकैरसमैः स्वेन वर्जितैः ॥
कति संख्या विभेदाः स्युर्वादि वेत्ति निगद्यताम् ॥

अर्थ—एकापासून क्रमिक ९ अंकांतून प्रत्येक वेळां सहा सहा अंक घेऊन संख्याभेद किती होतील ?

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

न (न - १) (न - २) (न - १ + १)

यांत न = ९ व १ = ६ ठेवून

$९ \times ८ \times ७ \times ६ \times ५ \times ४ = ६०४८०$

संख्याभेद हे उत्तर.

सूत्रम्—निरेकमंकैक्यमिदं निरेकस्थानांत मेकापचितं विभक्तम् ॥ रूपादिभिस्तन्निहतैः समाः स्युः संख्याविभेदा नियतैऽकयोगे ॥ नवान्वितस्थानकसंख्यकाया कनेऽकयोगे कथितं तु वेद्यम् ॥ संक्षिप्तपुक्तं पृथुताभयेन नांतोऽस्ति यस्माद्रणिताणवस्य ॥

अर्थ—अंकांची बेरीज व अंकस्थाने यावरून संख्याभेद

काढणें माल्यास, अंकांच्या बेरीजेंतून १ वजा करून बाकी रा-
हील ती, स्थानसंख्येंत १ कमी इतक्या ठिकाणीं, एकेकानें
कमी करीत जाऊन मांडून त्यांस क्रमानें १, २, ३ इत्यादि
अंकांनीं भागावें. नंतर आलेल्या भागाकारांचा गुणाकार केला
असतां संख्याभेद येतात.

ही रीति, स्थानसंख्येंत ९ मिळवून जी संख्या होतील ती-
पेक्षां दिलेली बेरीज कमी असल्यास, उपयोगी पडते.

गणितरूपी समुद्राचा कांहीं अंत नाही म्हणून विस्तार भया-
स्तव येथें थोडक्यांत सांगितलें.

उदाहरणम्—पंचस्थानस्थितैरकैर्यद्योगस्रयोदश ॥ क-
ति भेदा भवेत्संख्या यदि वेत्सि निगद्यताम् ॥

अर्थ—ज्या संख्येमध्यें स्थानें ५ आहेत व त्यांतील अंकां-
ची बेरीज १३ होईल असे संख्याभेद किती होतील हें सांग ॥

उत्तरनिष्काशनक्रिया.

अंकांची बेरीज १३ यांत १ वजा करून १२, व स्थानें ५ यांत १
वजा करून ४ आले. हाणून

$$\frac{12}{2} \times \frac{11}{2} \times \frac{10}{2} \times \frac{8}{2} = 114$$

संख्याभेद हें उत्तर.

उपपत्ति.

या सूत्राची उपपत्ति समजण्याकरितां एकदोन उदाहरणेंच
साग्र कियेनें सोडवून दाखवितों म्हणजे सहज सूत्राची उपपत्ति
लक्ष्यांत येईल.

प्रथम स्थानें ३ व अंकांची बेरीज ५ आहे असें मानून
संख्याभेद आणूं.



(२२८)

ज्या अर्थी बेरीज ९ व स्थानें ३ आहेत झणून ३, १, १, हे अंक किंवा २, २, १ हे अंक संख्येमध्ये येतील यांचाचून-
कोणतेही अंक येणार नाहीत

आतां ३, १, १ यांचे सार्वशिक विपर्यय $\frac{13}{12}$ इतके

होतात. व २, २, १ यांचे सार्वशिक विपर्यय $\frac{13}{12}$ इतके

होतात म्हणून सर्व संख्याभेद

$$\frac{13}{12} + \frac{13}{12} = \frac{1 \times 2 \times 3 + 1 \times 2 \times 3}{1 \times 2} \\ = \frac{3(2+2)}{2} = \frac{8 \times 3}{1 \times 2} = 12 \text{ भेद}$$

म्हणून सूत्रक्रिया सिद्ध झाली.

अथवा स्थानें ४ व अंकांची बेरीज ९ धरून सोडवूं.

ज्या अर्थी स्थानें ४ आहेत त्या अर्थी २, १, १, १ हेच
अंक संख्येमध्ये असणार तेव्हां यांचे सार्वशिक विपर्यय

$$\frac{18}{12} = 1.5 \text{ होतात.}$$

$$\therefore \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{1 \times 2 \times 3} = \frac{8}{1} = 8 \text{ भेद व सूत्र साद-}$$

श्याकरितां

$$\frac{8 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3} = 8 \text{ हे उत्तर.}$$

म्हणून इष्ट सिद्धि झाली.

(११९)

ही रीती, स्थान संरूपेत ९ मिळवून जे येईल त्यापेक्षा अंकांची बेरीज कमी असेल तेव्हांच लागू पडते. हे उदाहरण क्रिया करितांना सहज लक्ष्यांत येईल.

याप्रमाणे अंकपाश प्रकरणाचे सोपपत्तिक भाषांतर समाप्त झाले.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

श्लोक—न गुणो न हरो न कृतिर्न घनः पृष्टस्तथाऽपि
दुष्टानाम् ॥ गर्वितगणकचटूनां स्यात्पातोऽवश्यमंकपा
न्नेऽस्मिन् ॥

अर्थ—दुसऱ्यांचा छल करणारे असे दुष्ट, व गर्विष्ठ गणक-
बटूला गुणाकार, भागाकार, वर्ग, किंवा घन यांपैकीं विचारिले
असतां ते सहज सांगतील करितां त्यांपैकीं कोणती गोष्ट न
विचारतां या अंकपाशांतील एखादे उदाहरण विचारिले असतां
त्या दुष्ट गणकांचा अवश्य पाडाव होईल.

श्लोक—येषां सुजातिगुणवर्गविभूषितांगी शुद्धाखिल-
व्यवहृतिः खलु कंठसक्ता ॥ लीलावतीह सरसोक्तिमुदा-
हरंती तेषां सदैव सुखसंपदुपैतिवृद्धिम् ॥

अर्थ—गुणाकार वर्ग इत्यादिकांनीं जिचीं प्रकरणें विभूषित
झाली आहेत, जिचीं क्षेत्र व्यवहारादि प्रकरणें स्पष्ट आहेत,
व जींत माधुर्य विशेष आहे; अशा प्रकारची ही लीलावती
ज्यांना उत्तम येत असेल त्यांना सुख व संपत्ति ह्या कमी पड-
णार नाहीत सदैव वृद्धीच होत जाईल.

श्लोक—अष्टौ व्याकरणानि षट् च भिषजां व्याचष्टुः
ताः संहिताः षट् तर्कान् गणितानि पंच चतुरो वेदाः

ते स्म यः ॥ रत्नानां त्रितयं द्वयं च बुधुषे मीमांसयोर्-
 तं सद्व्रह्मैकमगाधबोधमाहिमा सोऽस्याः कविर्मास्करः ॥

अर्थ—आठ व्याकरणें, सहा वैद्य संनंघी संहिता, सहा प्रकारची न्यायशास्त्रें, पांच प्रकारची गणितशास्त्रें चार वेद, पूर्व-मीमांसा, उत्तरमीमांसा, गीताभाष्य, दशोपनिषद्भाष्य शारीर-भाष्य, ह्या ग्रंथांचें अध्ययन केलेला असा मास्कराचार्य नामक कवि, हा या छीलावतीचा कर्ता होय.

ज्ञाप्रमाणें छीलावतीचें भाषांतर समाप्त झालें.

कृतमेतत्सर्वं श्रीकृष्णार्पितमस्तु.

शुद्धिपत्र.

अशुद्ध.	शुद्ध.	पृष्ठ.	पंक्ति.
यद्धनहस्त	यद्धनहस्त	३	१०
१२	× १२	७	८
इष्टांकांचा	इष्टांकांचा	९	९
$\frac{१}{२} \times \frac{३}{४}$	$\frac{१}{२} \times \frac{३}{४}$	२३	१६
चरणैर्भक्त	चरणैर्भक्त	२६	१९
तत्कियत्	तत्कियत्	४२	२३
ज्ञ	ज्ञ सं.	५५	१८
४	२४	६४	२३
५	४	६५	२
स्वर्णैक्य	स्वर्णैक्य	७०	१५
वर्णैक्य	वर्णैक्य	७०	१५
१३ × क्ष	१२ × क्ष	७१	१६
युतिवर्णैक्य.	युतिजातवर्ण	७२	१
+ न	- ९	८१	११
४ (न - ३) ^३	४ (न - ४) ^३	८४	२२
ने	०	८५	१६
सर्वधन	सर्वधन	८७	११
चालन	चालून	८९	१८
कृत्यैक	कृत्यैक	११२	१
इष्टं कर्ण	इष्टं × कर्ण	११६	५
मूलांतर	मूलांतर	११८	३
समाता	समता	१२५	

(२)

अशुद्ध.	शुद्ध.	पृष्ठ.	पंक्ति.
वेण्णो	वेणो	१३१	११
भूम्यर्घ	भूम्यर्घ	१३६	१०
(अफ - अम)	(अफ - अम) ^२	१५७	१०
बं अ + अं बं	बं अ + अं बं	१६६	<
तल्लेद्रु	तल्लेद्रु	१६६	१३
१०५०	१२५०	१७६	<
विघ्न	निघ्न	१८६	६
नंतर	नंतर तिला	१९०	२१
खळगाची	खळग्याची	१९१	१०
भै	भै	१९४	१९
+ म + ३ ल) ^२	+ (म + ३ ल) ^२	१९५	१
म	मै	१९५	<
प	पदे	१९५	१५
श	शै	२०९	२
४ श	४ शै	२१०	१७
तलांतर	तलांतर	२१२	१६
स्याकियती	स्यात्कियती	२१२	२१
३ १	३ - १	२२१	६
< ३ - १	< ३ - १	२२१	६